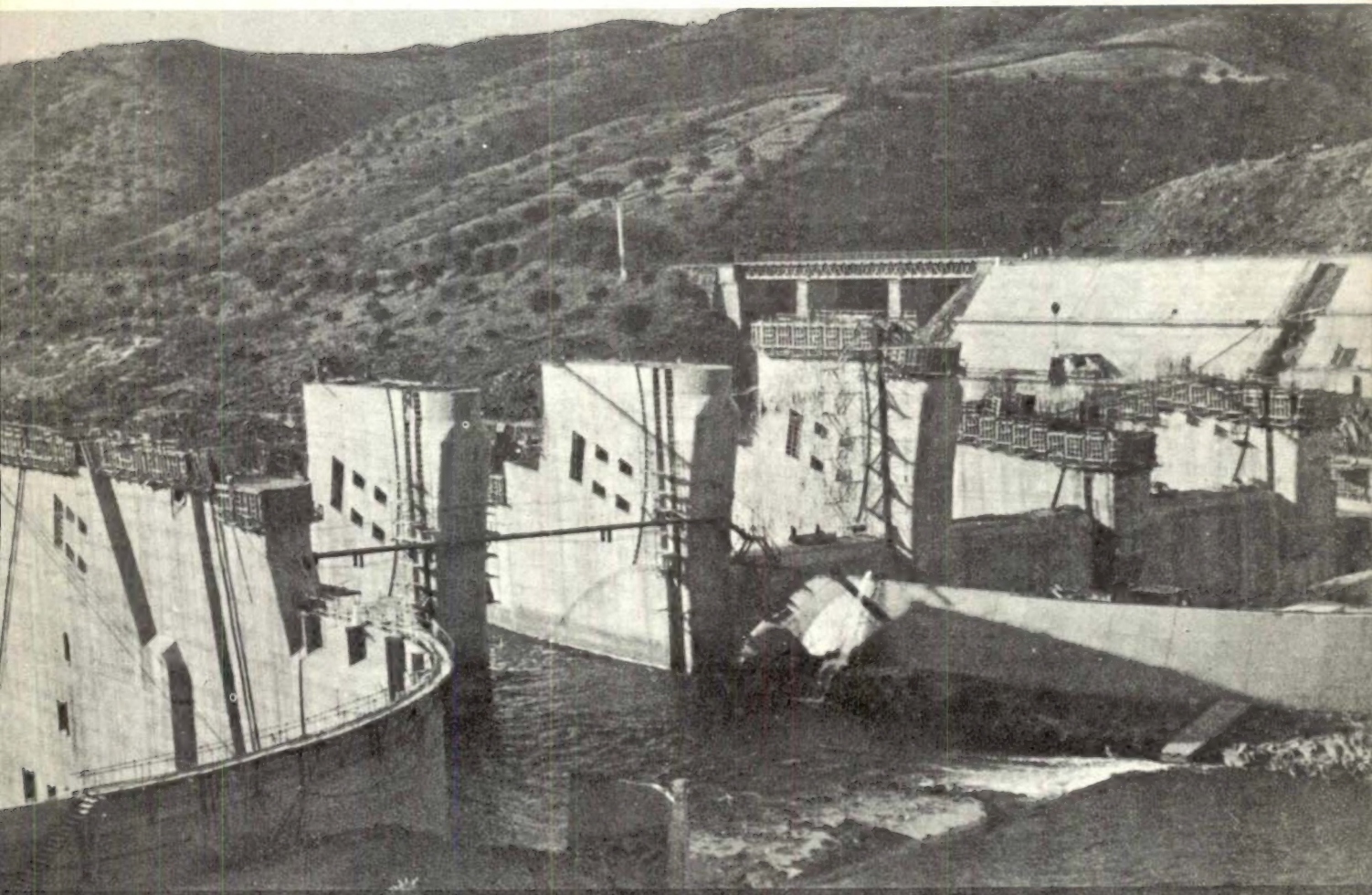
técnica



403

associação dos estudantes do instituto superior técnico

dezembro 1970

revista de engenharia

HELIAÇO

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

Fenner

REDUTORES DE VELOCIDADE
TIPO «PONTA DE VEIO»

mais de cem anos de progresso dos maiores fabricantes ingleses

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:
AUTO-LUSITANIA
ALFREDO DUARTE L.da
AV. DA LIBERDADE 73-77 LISBOA

10.000 obras realizadas

- coberturas
- perfis especiais
- vigas pré-esforçadas
- pavimento trief
- protecção de segurança
- mosaicos
- tubos

materiais novobra

PAVIMENTOS

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADOS (HOMOLOGADOS PELO LAB. NAC. DE ENGENHARIA CIVIL)

LEIRIA — PONTE DAS MESTRAS TEL. 2 37 68
LISBOA — AV. EST. UNIDOS DA AMERICA, 100, 5.º, Dto. TEL. 77 18 03 - 77 48 32
LAGOA — ESTRADA DO CARMO TEL. 94

CIMENTO SECIL

SECIL

Fábrica:
Outão — Setúbal
Telef. 228824/5

Escritório:
R. do Comércio, 56-3.º
LISBOA 2
Telef. 328201/2/3

técnica

NÚMERO 403 DEZEMBRO DE 1970 ANO XLV VOLUME XXXIII PUBLICAÇÃO MENSAL

Director

Silvério de Sousa Mendes

Administrador

Vladimiro de Oliveira

Secretário

Raul Pereira da Costa

Chefe de Redacção

Guilherme Silva Arroz

Redactores

Alvaro Manuel Cortez
Antonio Mouraz
Francisco Toco Emílio
José de Oliveira Paulo
Rui Lopes dos Santos

Assinaturas

		5 Nos.	10 Nos.
Continente e Ilhas	—	85$00	160$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	95$00	170$00
Estrangeiro	—		180$00

Número avulso — 25$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 108 — Lisboa

SUMÁRIO

109 *E. R. DE ARANTES E OLIVEIRA* — **Completeness and convergence in the finite element method.**
Complexidade e convergência do método dos elementos finitos.

125 *A. M. R. MARRECAS* — **Teoria da fonte móvel (cálculo da dependência temperatura-tempo).**
Moving heat source theory (temperature-time dependence calculation).

129 *DUARTE SILVA E MARÇAL GRILO* — **Utilização de coordenadas parabólicas na análise de tensões de um corpo de forma parabólica.**
Use of parabolic coordinates in the stress analysis for a body of parabolic form.

133 *DUARTE-RAMOS* — **Conceitos e propriedades topológicas do método de cálculo de circuitos eléctricos pela teoria dos grafos.**
Conceptions and propeties of graph theory for electrical network calculation.

143 *DINIZ DA GAMA* — **Análise da compressão uniaxial de provetes de rocha pelo método dos elementos finitos.**
Application of the finite element method to the analysis of rock samples under uniaxial compression.

157 **Vida Escolar e Associativa**
CARLOS DE CASTRO, MARIA JOSÉ CALHORDA E VIRGÍLIO SOARES — Introdução ao estudo dos complexos organometálicos dos metais de transição e sua aplicação em sínteses orgânicas.

156 **Do Mundo Técnico**

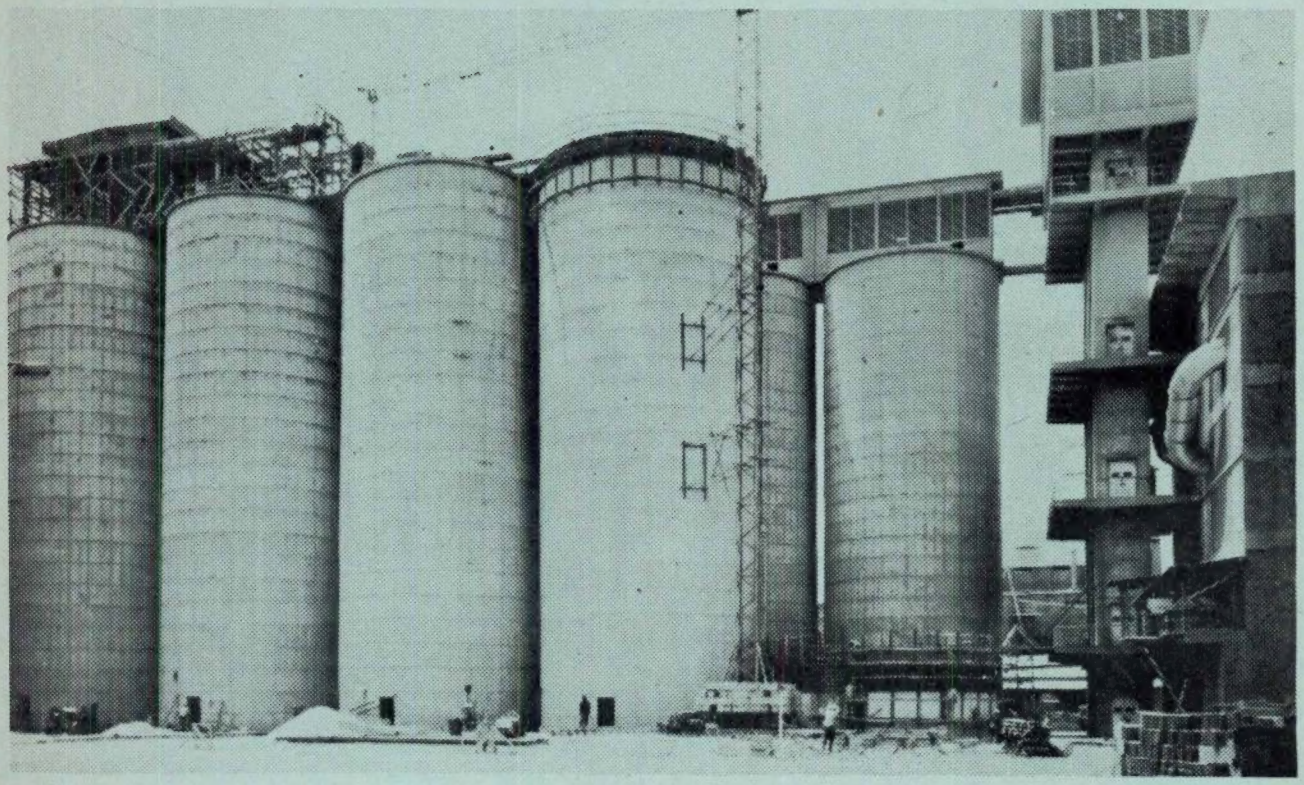
169 **Bibliografia**

CAPA: Barragem de Fratel — Em construção no Tejo.

INDICE ALFABETICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XXX
Aguiar & Melo, Lda.	XXIX
Auto-Lusitânia	2.ª da capa
Atlas-Copco	XXV
Bayer	XV
Cimento Secil	2.ª da capa
Cimianto	XII
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Construções Técnicas	XVII
Construções Schréder	XX
Electrotécnicos Reunidos	XXV
Electro-Arco, Lda.	II
Empresa de Cimentos de Leiria	X
Empresa Electro Cerâmica	XXVII
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Guedes & Almeida, Lda.	V e VIII
Harker Sumner	XXVI
Heliaço	2.ª da capa
Hoesch Portuguesa	XIV
Jayme da Costa, Lda.	XIX
Johann Keller	V
J. F. Azevedo e Silva	VII
J. Roma	XII
Jomatel	XIV
Livros Técnicos	XII e XXVII
MAGUE	XIII
Mendes de Almeida, S. A. R. L.	XXI
Míele Portuguesa	XXVIII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Plessey Automática Eléctrica Portuguesa	IV
Philips Portuguesa	XXIV
Sepsa	XXXI
Siemens	XII
Soc. Lisbonense de Metalização	XVIII
Sociedade Portuguesa Cavan	VI
S. K. F. Lda.	XXII
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sondagens Ródio, Lda.	V
Sopecate	II
Standard Eléctrica	IX
Tudor	XXIII
Wild Portugal, Lda.	III

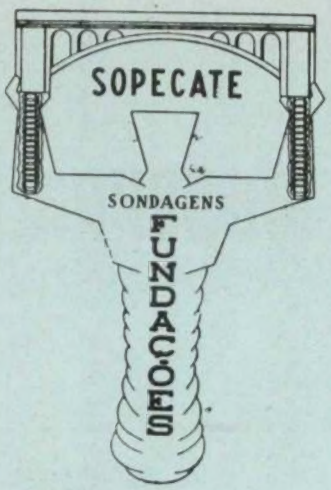
na base da construção moderna: estacas FRANKI, moldadas no solo.



A elevada gama de diâmetros das estacas Franki permite a melhor adaptação a cada problema concreto de fundações, desde a construção mais ligeira até à de grande concentração de cargas muito elevadas. Material permanentemente actualizado e pessoal com especialização constantemente aprofundada garantem a segurança, rapidez e economia das fundações executadas.

FRANKI

Consulte-nos: FUNDAÇÕES FRANKI, LDA. — PORTUGAL



sopecate

sondagens - fundações

ESCRITÓRIO: RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

- ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA
- SONDAGENS GEOLÓGICAS
- REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS
- FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R C ESQ. — LISBOA - 1
- TELEF. 56 11 71/72/73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

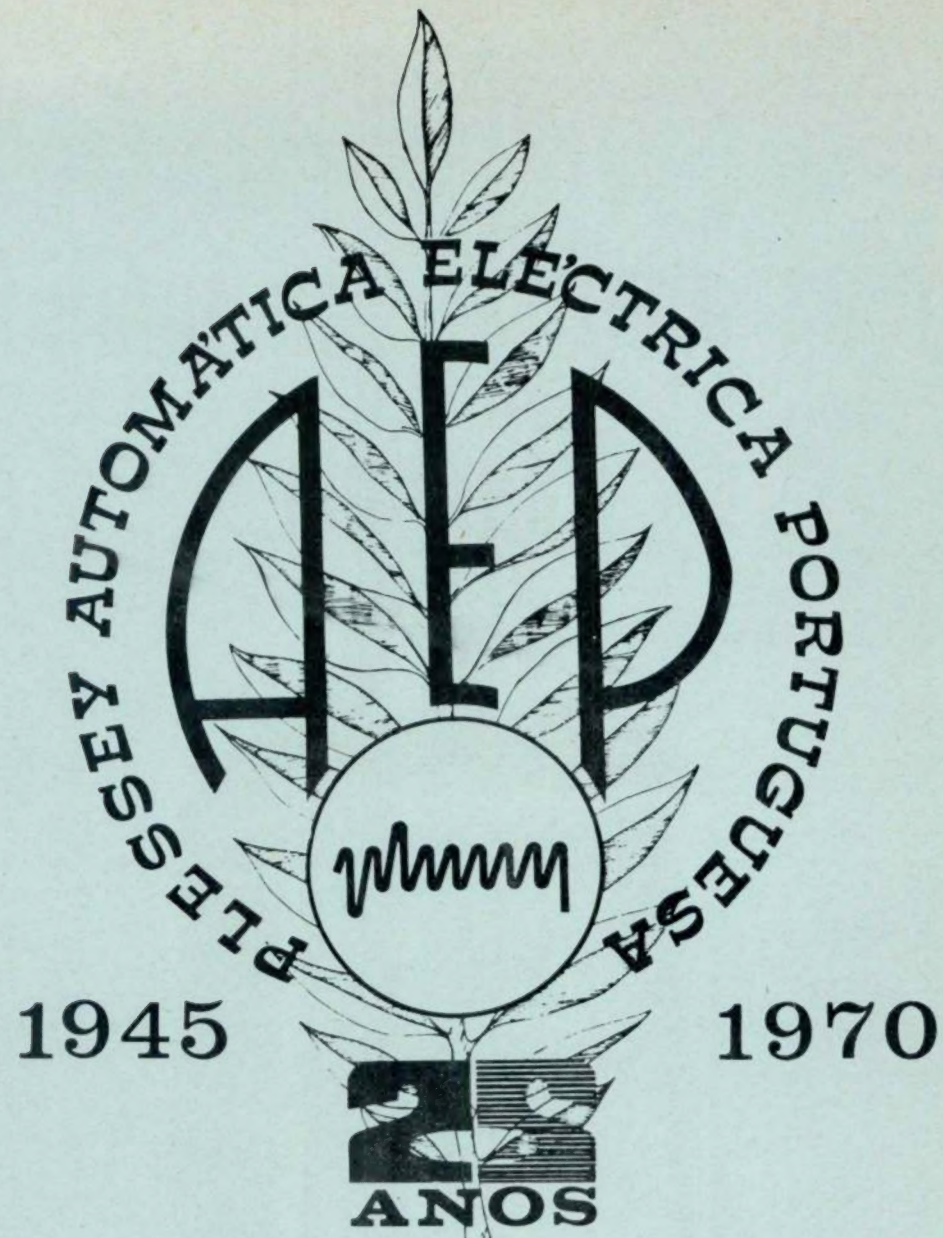
—

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

Temos apenas uma qualidade:
Primeira.
WILD
HEERBRUGG
SWISS
Os estojos de desenho WILD são confeccionados de aço crómio polido inoxidável.
Isto significa precisão, mesmo após uso de longos anos.
Um exemplo da mais alta perfeição: O traçado direito e preciso do compasso WILD. O mesmo possibilita um trabalho seguro. A posição do ângulo pode ser fixada com rapidez e segurança sem a mínima folga nas pernas do compasso.
A aplicação de materiais sòmente da melhor qualidade e o máximo cuidado no acabamento, justificam a reputação mundial de primeira qualidade, Made in Heerbrugg.
WILD
HEERBRUGG
Aparelhos para Fotogrametria
Aparelhos topográficos
Microscópios



AO SERVIÇO DAS TELECOMUNICAÇÕES

fabricantes de:

telefones de vários tipos • estações automáticas completas STROWGER e CROSSBAR • equipamento de TELEX • comutadores manuais • PPC (PBX), CAP (PAX) e PPCA (PABX) • memórias magnéticas para computadores electrónicos •••••

ESCAVADORAS HIDRÁULICAS
S/RODAS — S/LAGARTAS

— ENTREGAS IMEDIATAS

yumbo

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO
GUEDES & ALMEIDA, LDA.
RUA ÁUREA, 181 - 2.º — TELEFONES 32 50 11 - 32 78 45 — LISBOA

SONDAGENS RODIO, LDA.

R. S. Bento, 644 - 3.º
LISBOA

PORTO
LUANDA
BEIRA

TELEFONE: 68 80 96

SONDAGENS GEOLÓGICAS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
CONSOLIDAÇÃO DE FUNDAÇÕES
ESTACAS
PAREDES CONTÍNUAS
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS HIDRÁULICAS
CAPTAÇÃO DE ÁGUAS

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

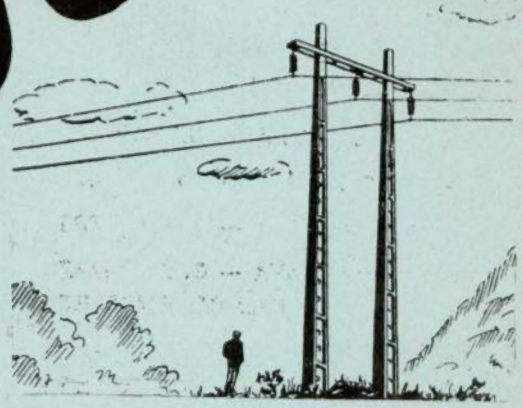
CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 73 77 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

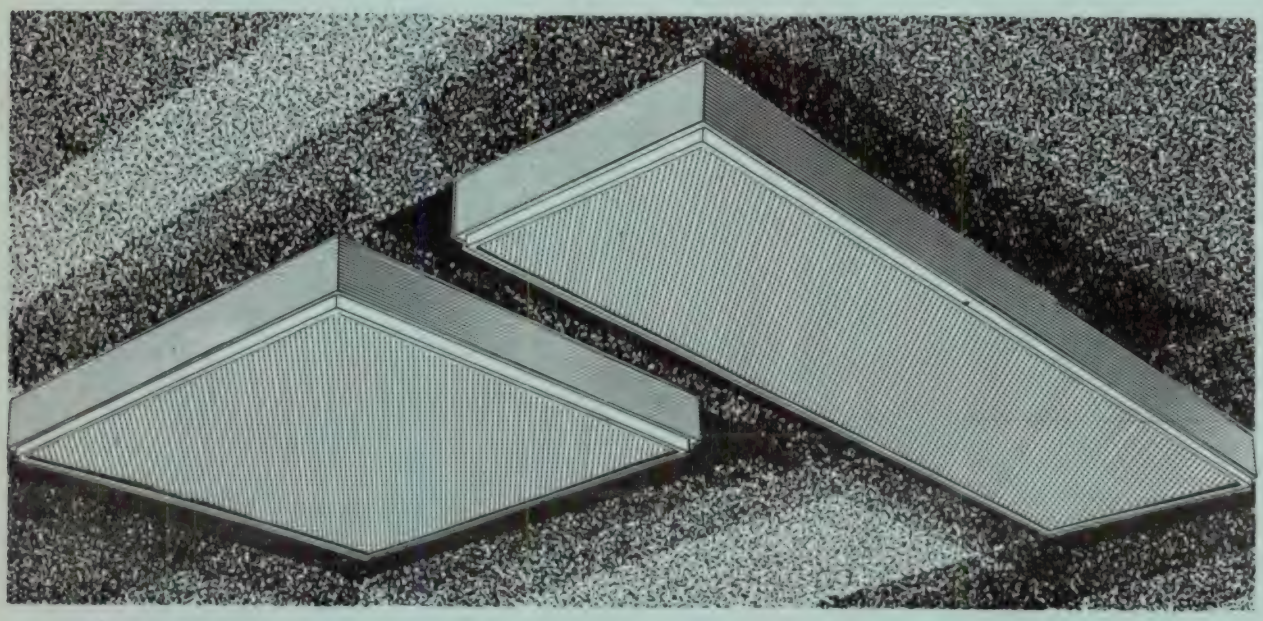
SOCIEDADE PORTUGUESA
Carvam



RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1-TELEF. 47812-50129

ARMADURAS PRISMÁTICAS JF

PARA LÂMPADAS FLUORESCENTES



CARACTERÍSTICAS

- Armaduras electrificadas para lâmpadas fluorescentes de 20 e 40 W
- Tensão nominal: 220 V~
- Suportes e porta-arrancadores de montagem super rápida COD 5024. Suportes com rotor orientável. Balastros estrangeiros com isolamento em poliester
- Base em metal, cor branca, com pintura sintética de secagem de estufa sobre um primário anti-corrosivo
- Montagem saliente – apenas 70 mm
- Difusor prismático em painéis prismalux.

Modêlos:	Dimensões:
4 x 20W	637 x 637 x 70 mm
2 x 40W	1,274 x 227 x 70 mm
3 x 40W	1,274 x 351 x 70 mm
4 x 40W	1,274 x 432 x 70 mm

O modelo 4X20W pode ser transformado em 6X20W, por encomenda especial.

Design Lilux (Sweden).

JF

J.F. DE AZEVEDO E SILVA & Cª Lda

Rua S. Francisco de Sales, 2-1º, Tel. 654165-Lisboa

WABCO

WESTIN'GHOUSE
AIR BRAKE COMPANY

Construction Equipment Division
Peoria (Illinois) 61601

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea 181-2.º — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45

A STANDARD ELÉCTRICA PROJECTA-SE NO MUNDO

Na vanguarda da indústria das Telecomunicações e Electrónica, a Standard Eléctrica, dimensionada ao âmbito mundial, ocupa uma prestigiosa posição nos mercados estrangeiros. A eficiência de uma administração actualizada, a capacidade técnica dos seus engenheiros e o profissionalismo com que todos os empregados encaram as suas responsabilidades, são valores reais e positivos que, de maneira decisiva, contribuem para o engrandecimento da Standard Eléctrica e da indústria nacional. Associada da International Telephone and Telegraph Corporation, um conjunto mundial com cerca de 200 fábricas localizadas em mais de 60 paises, a Standard Eléctrica fabrica numerosos produtos, desde os minúsculos transistores e circuitos integrados às grandes centrais telefónicas de serviço público, que são exportados para mais de 30 paises entre os quais se destacam: Inglaterra, França, Alemanha, Espanha, Suécia, África do Sul, Brasil e Estados Unidos da América do Norte.

Standard Eléctrica **ITT**

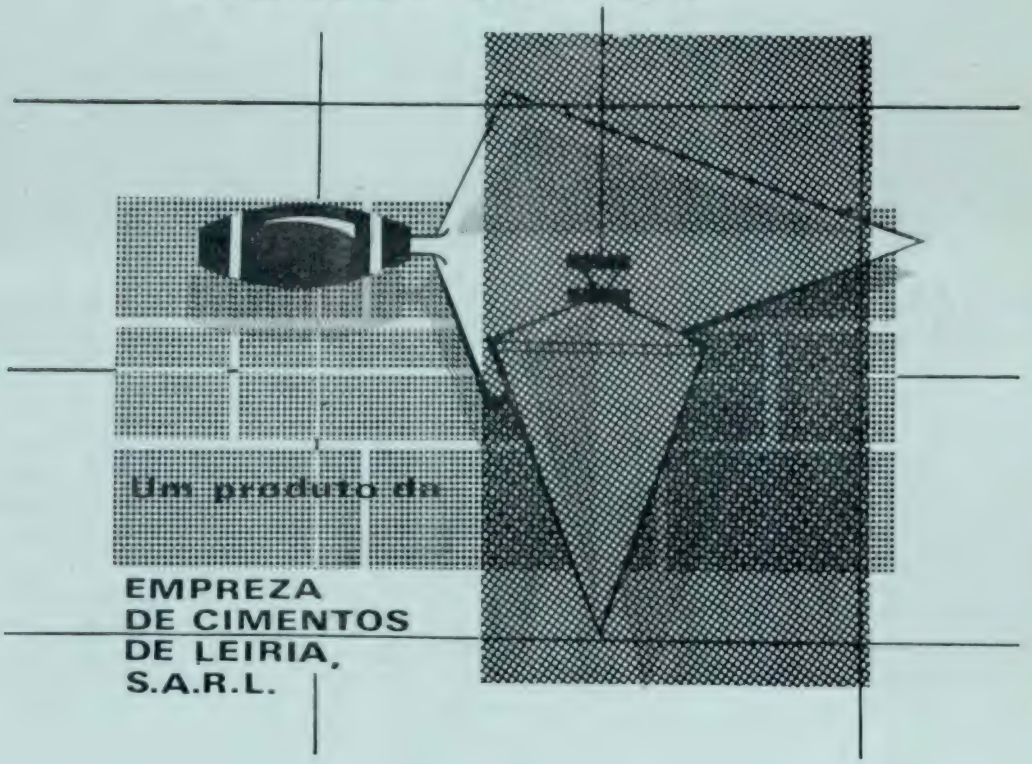
TG

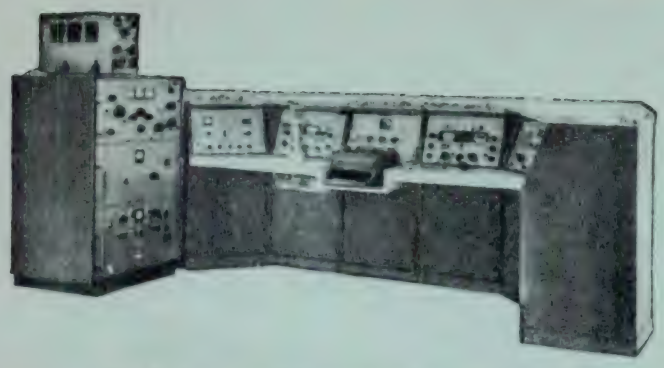
CONTRA A HUMIDADE

CIMENTO

LIZ-N

HIDROFUGADO





Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

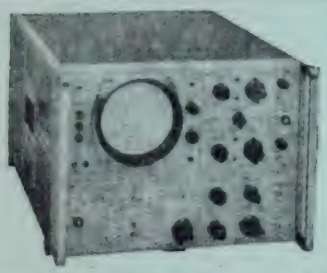
HEWLETT hp PACKARD

aparelhagem electrónica de medida e registo

Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador Sanborn

Registador digital Dymec

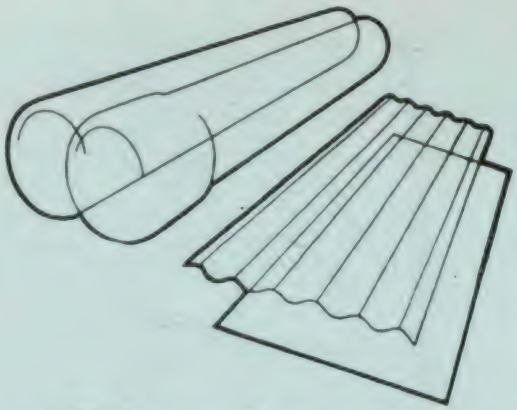


Osciloscopio HP

Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

FIBROCIMENTO



Cimianto

TUBAGEM PARA ESGOTOS
E PARA ÁGUAS SOB E SEM PRESSÃO
CHAPAS LISAS E ONDULADAS
PEÇAS MOLDADAS E ACESSÓRIOS

MOSAICOS HIDRÁULICOS

CIMIANTO — Soc. Técnica de Hidrálica, S.A.R.L.
Av. Fontes Pereira de Melo, 14 - Tel. 531161, 560161 - Lisboa

• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO

Aparelhagem de medidas eléctricas

- indicadora
- reguladora
- registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.º — P. do Município, 309-6.º S 3
LISBOA Tel 865151 — PORTO Tel. 0236732

TABELAS PARA O CÁLCULO DE BETÃO ARMADO

por

Brazão Farinha e Mexia Heitor

Preço 250$00
Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À

técnica

TABELAS TECNICAS PARA ENGENHARIA CIVIL

6ª edição revista e actualizada
por J.S. Brazão Farinha

Preço 200$00

MANUAL DE HIDRAULICA

por Armando C. Lencastre

2ª edição revista e actualizada

Preço 240$00

PEDIDOS A "TECNICA"

Desconto de 10% aos nossos assinantes

técnica

NUMERO 403 DEZEMBRO DE 1970 ANO XLV VOLUME XXXIII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 517.96

COMPLETENESS AND CONVERGENCE IN THE FINITE ELEMENT METHOD (*)

por EDUARDO R. DE ARANTES E OLIVEIRA

Professor of the Instituto Superior Técnico, Head of the Applied Mathematics Division, Buildings and Bridges Department of the Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

RESUMO

Trata-se de um estudo sobre a convergência para a solução exacta de sucessões de soluções aproximadas geradas por sistemas de elementos finitos com dimensões decrescentes. Justifica-se um critério geral de completidade, e demonstra-se que um tal critério o é também de convergência se as derivadas de segunda ordem dos deslocamentos correspondentes às mesmas soluções aproximadas permanecerem limitadas dentro de cada elemento, à medida que as dimensões respectivas tenderem para zero. As conclusões são válidas para todas as teorias estruturais lineares contínuas, isto é, para a Elasticidade bi e tridimensional, assim como para vigas, cascas e placas. No caso das teorias simplificadas, isto é, das teorias em que se despreza a deformação por esforço transverso, as terceiras derivadas do deslocamento transversal devem também permanecer limitadas dentro de cada elemento, para que a convergência seja conseguida.

SYNOPSIS

A study is made of the convergence to the exact solution of sequences of approximate solutions generated by elements with decreasing size. A general completeness criterion is justified which is shown to become also a convergence criterion if the second order derivative of the displacements corresponding to the sucessive approximate solutions remain bounded within each element, as the size decreases indefinitely. The conclusions are valid for all the different linear continuous structural theories, i.e., for two and three-dimensional Elasticity, as well as for beams, shells and plates. If the simplified theories which result from neglecting the transverse shear deformation are considered, the third derivatives of the transverse displacement must also remain bounded within each element, in order that convergence can be obtained.

SECTION I
INTRODUCTION

The problem of convergence to the exact solution of a sequence of approximate solutions generated by patterns of finite elements decreasing in size is the main concern of this paper.

In the Ritz method (Reference 1), completeness is a sufficient condition for convergence. It is important to notice that the finite element method is a particularization of Ritz method only if compatibility between elements is achieved (Reference 2). Convergence is however still possible if compatibility is violated. Completeness

(*) First published in the Proceedings of the 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Analysis, Dayton, Ohio, 1968.

and convergence criteria are justified in the present paper which are valid even if compatility between elements is not obtained. The different kinds of structures are simultaneously considered but a special Section will be dedicated to the simplified theories which result from neglecting the transverse shear deformation.

A general discussion of the subject was already presented in a former paper by the author (Reference 2). The finite element method, however, was considered as a general mathematical technique, while the present paper is only concerned with elastic problems. Such particularization makes the discussion less abstract and thus easier to follow.

Some other papers (References 3, 4, and 5) have been written which examine convergence in connection with particular kinds of elements. No general convergence criteria have however been presented or justified in those papers.

SECTION II
A SYNTHETIC FORMULATION OF ELASTICITY

Elastic theories involve three kinds of magnitudes, stresses, strains and displacements, whose vectors will be denoted by $\mathbf{s}$, $\mathbf{e}$ and $\mathbf{u}$.

Such magnitudes are defined on a domain, D, corresponding to the body, and related by three kinds of field equations which can be symbolized as follows:

a) Equilibrium equations:

$$\mathbf{E}\,\mathbf{s} = \mathbf{X} \tag{1}$$

b) Strain-displacement relations:

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\,\mathbf{u} \tag{2}$$

c) Stress-strain relations:

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}\,\mathbf{e} \tag{3}$$

$\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ are first order differential operators, $\mathbf{X}$ is the vector of the body force density components, $\mathbf{H}$ is a symmetric positive definite matrix.

Equations 1, 2 and 3 are valid on D. On the boundary, B, the equilibrium equations become

$$\mathbf{N}\,\mathbf{s} = \mathbf{p} \tag{4}$$

$\mathbf{N}$ is a matrix whose elements depend on the orientation of the normal vector at each boundary point. $\mathbf{p}$ is the vector of the tractions applied to the boundary.

The elastic analysis reduces to finding the solution of the system of field Equations 1, 2 and 3 which satisfies certain boundary conditions. The simplest and most important types of boundary conditions can be expressed directly in terms of displacements or tractions applied to the boundary. Let B_1 and B_2 denote the portions of the boundary where tractions or displacements are respectively prescribed. The boundary conditions are analytically expressed by

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{in } B_1 \tag{5}$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{in } B_2 \tag{6}$$

The stresses and strains can be eliminated an the problem can be formulated in terms of displacements only. Indeed, introducing Equations 2 and 3 into 1, there results

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{X} \tag{7}$$

in which $\mathbf{K}$ is the second-order differential operator

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}\,\mathbf{H}\,\mathbf{D} \tag{8}$$

The boundary conditions are also easily expressible in terms of displacements or displacement derivatives.

Any set of fields, $\mathbf{s}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{u}$, defines an elastic field.

An elastic field is said to be compatible if Equations 2 and 3 and boundary conditions Equation 6 are obeyed. An elastic field is said to be equilibrated, with respect to a certain set of external forces, if it respects Equations, 1, 3 and 4 and boundary conditions Equation 5. The exact solution is the elastic field which is simultaneously a compatible and an equilibrated one.

Assume now that $\mathbf{u}$ and $\mathbf{s}$ are such that the derivatives involved in $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ exist everywhere in D. Then, the following relation holds

$$\int_D \mathbf{s}^T (\mathbf{D}\,\mathbf{u})\, dD = \int_D (\mathbf{E}\,\mathbf{s})^T \mathbf{u}\, dD + \int_B (\mathbf{N}\,\mathbf{s})^T \mathbf{u}\, dB \tag{9}$$

In this relation, vectors $\mathbf{s}$ and $\mathbf{u}$ are not necessarily related by the stress-strain relations, Equation 3.

The theorem of the minimum total potential energy, which is a consequence of Equation 9, states that the exact solution minimizes the functional

$$F = U - \int_D \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{u}\, dD - \int_B \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u}\, dB \qquad (10)$$

i.e., the total potential energy, in any class of compatible elastic fields which contains the exact solution.

The first term in F,

$$U = \int_D W\, dD = \frac{1}{2} \int_D \mathbf{e}^T \mathbf{H}\, \mathbf{e}\, dD =$$

$$= \frac{1}{2} \int_D (\mathbf{D}\mathbf{u})^T H (\mathbf{D}\mathbf{u})\, dD \qquad (11)$$

is the strain energy.

The upper dash on $\bar{\mathbf{X}}$ and $\bar{\mathbf{p}}$ indicates prescribed magnitudes.

The formulation which has been presented is quite general as it is valide not only for linear two-and three-dimensional Elasticity, but also for linear theories of plates, shells and beams.

In the case of a plate, for instance, vector $\mathbf{u}$ contains the transverse displacement and two rotations, vector $\mathbf{e}$ contains the curvatures and the transverse shear strains, vector $\mathbf{s}$ contains the bending ande twisting moments and the transverse shearing forces.

A very frequent simplification in the analysis of plates, shells and beams consists in neglecting the transverse shear deformation. This makes it possible to reduce the number of unknowns to one (the normal displacement) in the theory of plates, and three (the normal displacement and the tangential displacements) in the theory of thin shells.

Such simplified theories present the same scheme as the initial ones. Operators $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ are now however of the second order and operator $\mathbf{K}$ of the fourth order. The compatibility conditions involve the continuity of both the displacements and their first derivatives. As the rotations are expressed in terms of such magnitudes, the compatibility conditions are essentially the same, both in the simplified theories and in the corresponding initial ones where the transverse shear deformation is not neglected.

In the following discussion, the initial theories will first be considered. Operators $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ will thus be assumed of the first order, and continuity of displacements will be the only condition for compatibility Then, at the end of the paper, the results established for the initial theories will be used in the discussion of the simplied theories.

SECTION III

THE FINIT ELEMENT METHOD

The finite element method is a general discretization technique. In this method, domain D is assumed to be decomposed into a finite number of subdomains D^e and families of fields are considered which have different analytical expressions within each subdomain.

A finite element is a closed subdomain, D^e, together with the family of elastic fields which are allowed to occur within it. Such family is a linear combination with coefficients q_i^e of a finite number of unit modes, so that each field of the family corresponds to ascribing particular values to the parameters q_i^e.

The values of the displacements at a certain number of points on the boundary of the element, called nodes or nodal points, are, as a rule, chosen as parameters. The allowed fields need not be introduced however by giving the expression of the displacements directly in terms of their own nodal values. They can indeed be given in terms of equal number of arbitrary parameters which in turn can be expressed in terms of those nodal valures.

The type of an element refers to its general shape, nodal point specification and to the allowed fields, analytically defined by expressing the displacement vector $\mathbf{u}^e$ in terms of the para-

meters (generalized displacements) and the coordinates:

$$u^e = f^e (x_1, x_2, \ldots) q^e \qquad (12)$$

q^e is the vector of the nodal displacements q_i^e.

The elements f_{ij}^e of f^e are supposed to be continuous in the closed subdomain occupied by the finite element. The unit modes are defined by the columns of f^e.

Each displacement component is assumed to depend only on its own nodal values. Thus, if q_j^e corresponds to the component u_i^e, all the magnitudes f_{kj}^e, for which $k \neq i$, will vanish.

In order that Equation 12 can be homogeneous, q_j^e must be amenable to a nondimensional form

$$f_{ij}^e (x_1, x_2, \ldots) = \psi_{ij}^e \left(\frac{x_1}{l^e}, \frac{x_2}{l^e}, \ldots \right) \qquad (13)$$

in which l^e is a typical dimension of the element, for instance its maximum diameter. ψ_{ij}^e is a function which does not depend on the absolute dimensions of the element.

The different finite elements are made compatible through the specification of reduced compatibility conditions. These require that the values of the displacements be the same at coincident nodes of adjacent elements and equal the prescribed ones at the nodes located on B_2. For the sake of simplicity, such prescribed displacements are assumed to vanish.

A point of the domain is said to be a node of the system if it is a node for on or more elements.

Let q_n be the vector of the values of the displacements at every node of the system but those which are located on B_2. The reduced compatibility conditions can be expressed by writing for each element

$$q^e = T^e q_n \qquad (14)$$

where matrix T^e depends on the topology of the system.

Equations 12 and 14 show that the knowledge of q_n is enough for the definition of the field within every element of the system.

Introducing 14 in 12, there results

$$u^e = F^e q_n \qquad (15)$$

in which

$$F^e = f^e T^e \qquad (16)$$

Equation 15 is valid in D^e. The whole set of equations (15) (one for each element) piecewise defines a family C_n of elastic fields each of which corresponds to a certain vector q_n. Index n refers to a certain degree of subdivision of D into subdomains.

The reduced compatibility conditions are generally not sufficient to make the displacement components continuous across the element boundaries. This depends on the type of the element.

If the type is such that the reduced compatibility conditions are sufficient to ensure continuity of the displacements across the element boundaries, the elements are said to be conforming. If continuity is violated, the elements are termed nonconforming.

The approximate solution which the finite element method provides for the elastic problem is determined by making the functional

$$F_n = \sum_e U^e - \int_D \bar{X}^T u \, db - \int_{B_1} p^T u \, dB \qquad (17)$$

stationary in the class C_n of the elastic fields piecewise defined by Equation 15.

U^e is the strain energy of the element e

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{D^e} (D u^e)^T H (D u^e) \, dD \qquad (18)$$

If the continuity of the displacements across the element boundaries is achieved, the first term in F_n becomes the strain energy of the body and F_n becomes the total potential energy. The finite element method is then nothing else but a particularization of Ritz's method, characterized by the piecewise definition of the field.

The expression of F_n can be modified to take into account external forces distributed on the element interfaces. F_n becomes then

$$F_n = \sum_e U^e - \int_D \bar{X}^T u \, dD - \sum_e \int_{B_I^e} \bar{p}^T u \, dB =$$

$$= \sum_e (U^e - \int_{D^e} \bar{X}^T u \, dD - \int_{B_I^e} \bar{p}^T u \, dB) \quad (19)$$

B_I^e denotes the portion of the boundary of element e where prescribed external forces are applied. No reactive forces are to be considered.

In order that the last term of Equation 19 can be calculated, the external forces distributed on the interfaces must be shared between the pair of elements which contact along each interface. We assume those forces to be equally distributed between the elements in contact.* The magnitude of $\bar{p}$ to be assigned to each element is thus half of the distribution density of the force applied to the interface.

Introducing Equation 12 in Equation 19, we obtain

$$F_n = \frac{1}{2} \sum_e \left[q^{e^T} K^e q^e - 2 q^{e^T} \bar{Q}^e \right] \quad (20)$$

where

$$K^e = \int_{D^e} (D f^e)^T H (D f^e) \, dD \quad (21)$$

$$\bar{Q}^e = \int_{D^e} f^{e^T} \bar{X} \, dD + \int_{B_I^e} f^{e^T} \bar{p} \, dB \quad (22)$$

K^e is the stiffness matrix of the element. $\bar{Q}^e$ is the vector of the external generalized forces applied tho the element.

* This assumption is necessary only if conformity is not achieved.

Introducting Equation 14, we obtain

$$F_n = \frac{1}{2} \left[q_n^T (\sum_e T^{e^T} K^e T^e) q_n - \right.$$

$$\left. - 2 q_n^T (\sum_e T^{e^T} \bar{Q}^e) \right] \quad (23)$$

Making

$$K_n = \sum_e T^{e^T} K^e T^e = \sum_e \int (D F^e)^T H (D F^e) dD \quad (24)$$

$$\bar{Q}_n = \sum_e T^{e^T} \bar{Q}^e = \sum_e (\int_{De} F^{e^T} \bar{X} \, dD +$$

$$+ \int_{D_I e} F^{e^T} \bar{p} \, dB) \quad (25)$$

there results

$$F_n = \frac{1}{2} q_n^T K_n q_n - q_n^T Q_n \quad (26)$$

The symmetric matrix K_n is called the stiffness matrix of the structure. $\bar{Q}_n$ is the vector of the external generalized forces applied to the structure.

The stationary conditions for F_n are obtained by equating to zero the derivatives of F_n with respect to the mutually independent parameters q_{ni}. It results in the system of linear equations

$$K_n q_n = \bar{Q}_n \quad (27)$$

Equation 27 permits the determination of the displacements whenever the structure is stable, i.e., whenever the prescribed generalized displacements are enough to prevent rigid body motion. Then, indeed, the columns of $[D F^e]$ are linearly independent of D and, as H is definite positive, K_n is nonsingular and also definite positive.

Functional F_n can be expressed as

$$F_n = \frac{1}{2} q_n^T K_n q_n - q_n^T K_n q_{an} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(q_n - q_{an})^T K_n (q_n - q_{an}) - q_{an}^T K_n q_{an} \right] \quad (28)$$

in which q_{an} is the solution of Equation 27. q_{an} corresponds thus to the approximate solution.

As K_n is definite positive, the first term in Equation 28 is positive unless q_n equals q_{an}. This proves that the approximate solution minimizes F_n in C_n.

By virtue of Equation 27, $\sum_e U^e$ can be expressed in terms of the external generalized forces applied to the structure. Indeed,

$$\sum_e U^e = \frac{1}{2} \sum_e q^{e^T} K^e q^e = \frac{1}{2} q_n^T K_n q_n =$$
$$= \frac{1}{2} q_n^T \bar{Q}_n \quad (29)$$

in which Q_n is the vector of the external forces corresponding to q_n.

The same magnitude can also be expressed in terms of the external generalized forces applied the elements. Indeed, introducing Equation 25 in Equation 29, there results

$$\sum_e U^e = \frac{1}{2} q_n^T \left(\sum_e T^{e^T} Q^e \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_e (T^e q_n) \bar{Q}^e = \frac{1}{2} \sum_e q^e \bar{Q}^e \quad (30)$$

Equation 27 makes it possible to analyse the structure by the displacement method.

The force method may also be used. It starts from the reduced equilibrium conditions, which are expressed in terms of the vector

$$Q^e = K^e q^e \quad (31)$$

of the total generalized forces acting on each element. Multiplying both sides of Equation 31 by T^{e^T} and summing, there results

$$\sum_e T^{e^T} Q^e = \sum_e T^{e^T} K^e q^e \quad (32)$$

Introducing Equation 14, we obtain

$$\sum_e T^{e^T} Q^e = \sum_e T^{e^T} K^e T^e q_n = K_n q_n \quad (33)$$

and, finally, using Equation 27,

$$\sum_e T^{e^T} Q^e = \bar{Q}_n \quad (34)$$

Equation 34 expresses the reduced equilibrium conditions. It must not be confused with Equation 25. Q^e includes indeed not only the generalized external forces acting on the element (which are the only ones contained in $\bar{Q}^e$) but also the interaction forces between elements and the generalized reactions corresponding to the prescribed displacements.

SECTION IV
COMPLETENESS CRITERION

Completeness of a sequence of families C_n with respect to a given set C has a meaning provided we can compute the distance between any element u_n of each family and any element c of C. The sequence of families is said to be complete with respect to C if it is possible to find, for a specified $\varepsilon > 0$, an integer N, such that in each family with order $n > N$ there exists an element u_{cn} which satisfies the inequality

$$d\,(u_{cn}, c) < \varepsilon \quad (35)$$

where c is any element belonging to C.

The following definition of distance is chosen as a basis for our discussion:

$$d(n_n, c) = \sqrt{\sum_e \int_{D^e} \left[\mathbf{D}(\mathbf{u}^e - \mathbf{u}_c) \right]^T \mathbf{H} \left[\mathbf{D}(\mathbf{u}^e - \mathbf{u}_c) \right] dD} \qquad (36)$$

in which $\mathbf{u}^e$ and $\mathbf{u}_c$ denote, within D^e, the displacement fields corresponding to u_n and c.

The expression under the square root is nothing else than the double of the sum of the strain energies corresponding to the difference of the two fields u_n and c. Such expression is never negative and cannot vanish unless the two fields coincide (*). It would be easy to show that other requirements are also satisfied which make Expression 36 a proper definition of distance.

A general criterion for completeness will be stated and justified in this section. Such criterion essentially does not differ from the one which was presented by Baseley *et al.* (Reference 5).

Let C be the set of the compatible elastic fields whose displacements have continuous and bounded second order derivatives within each element.

We wish to demonstrate that completeness with respect to C will be obtained if

a) the general analytical expression for u_i^e within element e is a polynomial with a number of arbitrary parameters equal to the number of unit modes corresponding to the element,

b) The terms of degree higher than the first can vanish regardless of the values taken by the constant term and the coefficients which affect the linear terms,

c) the constant term and the coefficients which affect the linear terms are completely arbitrary.

We remark that, once these conditions are respected, the displacement component u_i^e or its first derivatives can take up any arbitrary value throughout the element, if suitable values are ascribed to the parameters.

The displacements u_i of any field c belonging to C can be represented inside D^e by the following Taylor's expansion

$$u_i = u_i(O) + u_{i,j}(O)(x_j - x_j^o) + \frac{1}{2!} u_{i,jk}(O_j)(x_j - x_j^o)(x_k - x_k^o) \qquad (37)$$

(*) The structure is assumed to be stable, i. e., such that the prescribed displacements are enough to prevent rigid body motion.

O and O_j are points in D^e. O_j depends on the coordinates of the point where u_j is to be determined.

Let us consider now the displacement field with components

$$u_{ti}^e = u_j(O) + u_{i,j}(O)(x_j - x_j^o) \qquad (38)$$

within D^e, which we call tangent field to u at O.

As all the second-order derivatives are supposed to be bounded inside D^e, Equations 37 and 38 yield

$$\left| u_j - u_{ti}^e \right| < \frac{d}{2!} V_1 (l^e)^2 \qquad (39)$$

in which V_1 is an upper bound for all the second derivatives and l^e is the maximum diameter of element e. d is the total number of second order derivatives.

By considering similar expansions for the first derivatives of u_j, it is also possible to derive the inequality

$$\left| u_{i,j} - u_{ti,j}^e \right| < d\, V_1\, l^e \qquad (40)$$

As operator $\mathbf{D}$ involves derivatives of the first order, we have

$$\left[\mathbf{D}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_t^e) \right]^T \mathbf{H} \left[\mathbf{D}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_t^e) \right] < V_2^e (l^e)^2 \qquad (41)$$

for l^e sufficiently small. V_2^e is a positive number.

The distance between the elastic field c, corresponding to $\mathbf{u}$, and u_{t_n} corresponding to $\mathbf{u}_t^e$, is thus

$$d(u_t, c) = \sqrt{\sum_e \int_{D^e} \left| D(u - u_t^e) \right|^T H \left| D(u - u_t^e) \right| dD} < \sqrt{\sum_e V_2^e (l^e)^2 D^e} <$$

$$< \sqrt{V_2 l_n^2 \sum_e D^e} = \sqrt{V_2 l_n^2 D} \qquad (42)$$

in which V_2 and l denote the maximum values of V_2^e and l^e in the whole set of elements.

Equation 42 means that the distance between u_t and c tends to zero when n tends to infinity, that is, when the size of elements decreases indefinitely.

Consider now a type of finite element generating a sequence of families of fields, C_n, whose completeness is to be investigated.

Let u_{cn} be the field of C_n whose displacements take, at the nodes, the same values as the displacement of c. u_c^e corresponds to u_{cn} within D^e.

Suppose the general criterion to be satisfield. u_t^e is thus one of the displacement fields which can occur within the finite element. Let such field correspond to values q_{ti}^e of the parameters, i. e.,

$$u_t^e = f^e q_t^e \quad \text{within } D^e \qquad (43)$$

On the other hand,

$$u_c^e = \phi^e q_c^e \qquad (44)$$

From Equations 43 and 44, we obtain

$$\left| u_{ti}^e - u_{ci}^e \right| = \left| f_{ij}^e (q_{tj}^e - q_{cj}^e) \right|, \text{ within } D^e \qquad (45)$$

On the other hand,

$$\left| u_{ti,k}^e - u_{ci,k}^e \right| = \left| f_{ij,k}^e (q_{tj}^e - q_{cj}^e) \right|, \text{ within } D^e \qquad (46)$$

But, by virtue of Equation 13,

$$f_{ij,k}^e = \frac{1}{l^e} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{x_k}{l^e} \right)} \left[\psi_{ij}^e \left(\frac{x_1}{l^e}, \dots \right) \right] = \frac{1}{l^e} \chi_{ij}^e \left(\frac{x_1}{l^e}, \dots \right) \qquad (47)$$

As the absolute dimensions of the element do not appear explicitly in the functions ψ_{ij}^e and χ_{ij}^e, these functions remain bounded as the size of the element decreases. Assume the moduli of all those magnitudes remain below a positive number, V_3.

Then

$$\left| u_{ti}^e - u_{ci}^e \right| < V_3 \sum_j \left| q_{tj}^e - q_{cj}^e \right| \qquad (48)$$

$$\left| u_{ti,j}^e - u_{ci,j}^e \right| < \frac{V_3}{l^e} \sum_j \left| q_{tj}^e - q_{cj}^e \right| \qquad (49)$$

within D^e.

On the other hand, as u_i^e and u_i take the same values at the nodes, and the parameters q_i^e are the nodal values of the displacements, Equation 39 permits to write

$$\left| q_{tj}^e - q_{cj}^e \right| < \frac{d}{2!} V_1 (l^e)^2 \qquad (50)$$

Introducing Equation 50 into Equations 48 and 49, we obtain

$$\left| u_{ti}^e - u_{ci}^e \right| < \frac{V_1 V_3 N^e d}{2!} (l^e)^2 \qquad (51)$$

$$\left| u_{ti,}^e - u_{ci,j}^e \right| < \frac{V_1 V_3 N^e d}{2!} l^e \qquad (52)$$

N^e being the total number of parameters corresponding to element e.

Equations 51 and 52 hold even if the first derivatives of u_{ci}^e are discontinuous in D^e. This is an important remark because sometimes (Reference 7) the element itself is considered subdivided into parts and the displacement field admits different analytical expressions within each part.

MAGUE

Guindaste portuario de 6 ton.x.18m fornecido à SECIL para a sua Fábrica de Outão-Setúbal

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS — *Projecto e fabrico*

TURBINAS HIDRÁULICAS — *Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*

TURBINAS A VAPOR — *Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*

CALDEIRAS A VAPOR — *Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*

EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS MAGUE S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

A utilização de betão pronto impôs-se
ao dono da obra,
ao técnico responsável
e ao empreiteiro
porque garante qualidade,
rapidez e economia
em relação
a um betão fabricado em estaleiro.

Consulte-nos.

Os nossos serviços técnicos
e comerciais
terão o maior prazer em prestar
todo o apoio
e colaboração
que nos forem solicitados.

UMA NOVA MARCA
DE BETÃO PRONTO

JOMATEL

S 5168

WACKER

Pinturas à base de Resinas de Silicone

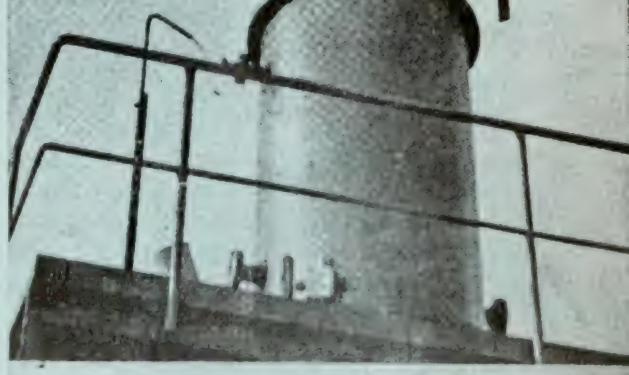
protegem aparelhos industriais da humidade, da corrosão e da influência de temperaturas extremas.

As Resinas de Silicone Wacker dão, em conjunto com pigmentos apropriados, pinturas muito bem aderentes, impermeáveis e bem resistentes a temperaturas até + 600°C. O risco das pinturas se sujarem antes da estufagem pode ser eliminado pela aplicação de resinas de silicone secáveis ao ar.

Aconselhamos com todo o gosto e pomos à sua disposição receitas básicas de eficiência comprovada.

Em Portugal:
Hoechst Portuguesa, Lda.
Avenida Sidónio Pais, 379 – Tel. 67051 – Porto
Avenida Duque d'Avila, 169 - 1º – Tel. 45141 – Lisboa

No Brasil:
Hoechst do Brasil Química e Farmaceutica S. A.
Rua Braulio Gomes, 36 – Caixa Postal 6280
São Paulo – Telefone 353152
Filiais no Rio de Janeiro – Recife – Porto Alegre – Salvador



WACKER-CHEMIE GMBH MÜNCHEN
Alemanha

The similarity between Equations 51 and 52 and Equations 39 and 40 allows a jump straight to the inequality

$$d\,(u_{tn}, u_{cn}) < \sqrt{V_4\, l_n^2\, D} \qquad (53)$$

in which u_{cn} represents the piecewise defined elastic field with displacements u_j^e within element e. V_4 is a positive number.

Combining Equations 42 and 53, we obtain finally

$$d\,(u_{cn}, c) \leq d\,(u_{cn}, u_{tn}) + \qquad (54)$$

$$+ d\,(u_{tn}, c) < l_n \sqrt{D}\left(\sqrt{V_4} + \sqrt{V_2}\right)$$

Equation 54 means that the distance between u_{cn} and c tends to zero with the size of the largest element, so that, as c is an arbitrary element of C, the completeness proof is finally achieved.

SECTION V

CONVERGENCE DISCUSSION

Consider any type of finite element which can generate a sequence $\{C_n\}$ of families of fields complete with respect to C. We wish to investigate if the sequence of approximate solutions, $\{u_{an}\}$, obtained by minimizing F_n in each family C_n converges to the exact solution, which is assumed to belong to C.

We know already that completeness implies convergence to the exact solution if it is associated with conformity. The finite element technique becomes then indeed a particularization of Ritz's method, in which conformity is a sufficient condition for convergence.

Let u_{en} be the field in C_n whose displacements take at the nodes the same values as the displacements of the exact solution.

As the exact solution, u_o, belongs to C, and completeness with respect to C is ensured, it is possible to determine N such that, for $n > N$,

$$d\,(u_o, u_{en}) < \varepsilon \qquad (55)$$

ε being a positive and arbitrarily small number.

As F_n is a continuous functional, we can find ε such that

$$F_n\,(u_{en}) = F_n\,(u_o) \pm \varepsilon' \qquad (56)$$

ε' being also positive and arbitrarily small.

As u_{en} belongs to C_n, and u_{an} minimizes F_n in C_n,

$$F_n\,(u_{an}) \leq F_n\,(u_{en}) \qquad (57)$$

and

$$F_n\,(u_{an}) \leq F_n\,(u_o) + \varepsilon' \qquad (58)$$

The approximate solution u_{an} equilibrates a system of external forces which generally differs from the system of external forces actually applied to the body. Let u_a denote the compatible field which equilibrates the same external forces as u_{an}, i.e., the exact solution corresponding to those forces.

We assume that u_a belongs to C, i.e., that the second derivatives of the corresponding displacements are continuous and bounded within each element. This assumption will later be discussed.

Let u_{bn} be the field in C_n whose displacements have the same values at the nodes as the displacement corresponding to u_a. As u_a belongs to C, and the sequence $\{C_n\}$ is complete with respect to C, it is possible to find N_1 such that, for $n > N_1$

$$d\,(u_a, u_{bn}) < \varepsilon'' \qquad (59)$$

ε'' being a positive number, arbitrarily small.

We can also find N_1 such that the first derivatives of the displacements (see Equations 40 and 52), and thus the difference of the stresses, are smaller than ε'' within each subdomain, that is

$$|\sigma_a - \sigma_{bn}| < \varepsilon'' \tag{60}$$

ε'' being a column vector with all its elements equal to ε''.

Let us consider now the generalized forces connected with the systems of external forces respectively corresponding to u_a and u_{bn}.

By virtue of Equation 22

$$Q_b^e - \bar{Q}_a^e = \int_{D^e} \phi^{eT} (X_b^e - \bar{X}_a^e)\, dD + \int_{B_1^e} \phi^{eT} (\bar{p}_b^e - \bar{p}_a^e)\, dB \tag{61}$$

in which $\bar{X}_b^e$ and $\bar{p}_b^e$ correspond to u_{bn} and $\bar{X}_a^e$ and $\bar{p}_a^e$ correspond to u_a.

The body force term tends to be of higher order than the second term in Equation 59, as n tends to infinity. The difference of the generalized forces tends then to be expressed by

$$\bar{Q}_b^e - \bar{Q}_a^e = \int_{B_1^e} \phi^{eT} (\bar{p}_b^e - \bar{p}_a^e)\, dB \tag{62}$$

By virtue of the continuity of the stresses within $\bar{D}^e$, Equation 60 is also valid on B^e. Thus,

$$p_b^e - \bar{p}_a^e < \varepsilon'' \tag{63}$$

and

$$\left| \bar{Q}_b^e - Q_a^e \right| < \int_{B_1^e} \phi^{eT} \varepsilon''\, dB \tag{64}$$

On the other hand, by virtue of Equations 18 30 and 36, the distance between u_{an} and u_{bn} is given by

$$2 \left| d(u_{an}, u_{bn}) \right|^2 = \sum_e (q_b^e - q_a^e)^T (\bar{Q}_b^e - \bar{Q}_a^{'e}) \tag{65}$$

As the external forces which equilibrate u_a and u_{an} are the same, $\bar{Q}_a^{1e}$ coincides with $\bar{Q}_a^e$. Thus,

$$d(u_{an}, u_{bn}) < \sqrt{\sum_e \left| q_b^{eT} - q_a^{eT} \right| \int_{B_1^e} \left| \phi^{eT} \right| \varepsilon''\, dB} \tag{66}$$

Equation 66 shows that the distance between u_{an} and u_{bn} can be so small as we wish.

Combining 66 with 59, we conclude that it is possible to find N_2 such, for $n > N_2$,

$$d(u_a, u_{an}) < \varepsilon^{III} \tag{67}$$

ε''' being a positive arbitrarily small number.

As F_n is a continuous functional, it is then possible, given ε^{IV}, to determine ε''' such that

$$F_n(u_a) = F_n(u_{an}) \pm \varepsilon^{IV} \tag{68}$$

As u_a belongs to C, the theorem of the total potential energy permits to write

$$F_n(u_a) \geq F_n(u_o) \tag{69}$$

and thus

$$F_n(u_o) \leq F_n(u_{an}) \pm \varepsilon^{IV} \tag{70}$$

Combining Equations 56, 57 and 68, there results

$$F_n(u_{an}) \leq F_n(u_{en}) \leq F_n(u_{an}) \pm \varepsilon' \pm \varepsilon^{IV} \quad (71)$$

and thus

$$F_n(u_{en}) = F_n(u_{an}) + \varepsilon^{V} \quad (72)$$

in which

$$0 < \varepsilon^{V} < \varepsilon' + \varepsilon^{IV} \quad (73)$$

But, as u_{an} and u_{en} both belong to C_n, Equation 28 permits us to write

$$F_n(u_{en}) - F_n(u_{an}) = \frac{1}{2}(q_{en} - q_{an})^T K_n (q_{en} - q_{an}) = \frac{1}{2}[d(u_{en}, u_{an})]^2 = \varepsilon^{V} \quad (74)$$

Combining Equation 74 and 55 we obtain finally

$$d(u_{an}, u_o) \leq d(u_{an}, u_{en}) + d(u_{en}, u_o) < \varepsilon + \sqrt{2\varepsilon^{V}} \quad (75)$$

which shows that $\{u_{an}\}$ converges to u_o.

It remains to investigate if u_a belongs to C.

Our reasoning will be based on a theorem which is known to be valid (Reference 8, p. 349) for linear elliptic equations of the form

$$\alpha_{ij} u_{,ij} + \beta_i u_{,i} + \gamma u = f \quad (76)$$

Such theorem states that the partial derivatives of order up to $(m+2)$ of u satisfy a Hölder condition with exponent α $(0 < \alpha < 1)$ in every bounded subdomain D^e with closure in a closed domain (*) $\bar{G}$, whenever all the derivatives of order up to m of f and the coefficients a_{ij}, b_i and c satisfy the same Hölder condition in $\bar{G}$.

The displacements will thus be Hölder continuous, and therefore have continuous bounded second order derivatives in a closed subdomain $\bar{D}^e$, whenever the body force density is Hölder continuous in $\bar{D}^e$.

u_a is the compatible field which equilibrates the same external forces as u_{an}. Such forces are of two kinds: body forces distributed within each subdomain, and forces distributed on the subdomain interfaces and on B.

u_a will belong to C, that is, the second-order derivatives of the corresponding displacements will be continuous and bounded within each subdomain D^e, if the body force density corresponding to u_{an} is Hölder continuous within $\bar{D}^e$.

The problem now consists in knowing whether the body force density corresponding to u_{an} is continuous and bounded (and therefore Hölder continuous) within $\bar{D}^e$, no matter how large is n. This is namely the case if the type of the element is such that the body force density vanishes or is obliged to a prescribed bounded and continuous variation within each element, no matter the values of the corresponding generalized displacements.

If such a situation arises, there is no doubt that the completeness criterion is also a convergence criterion.

Our reasoning can be adapted to cases (Reference 7) in which the elements are subdivided into parts and the allowed fields have different analytical expressions within each part. The body force density is then generally not continuous within the element taken as a whole. Convergence will however be proved if each part is treated as a separate element.

SECTION VI
SIMPLIFIED THEORIES

The results which have been established can be generalized to cover a much broader class of problems (Reference 2). The simplified theories

(*) An upper dash denotes a domain and its boundary, i e., a closed domain.

which result from neglecting the transverse shear deformation (see Section 2) belong to such class.

The convergence criterion respecting the simplified theories can however be established in a more direct way, if the results are used which were obtained for the corresponding theories in which the transverse shear deformation is not neglected.

It was proved in the last Section that convergence will be obtained if completeness with respect to C is achivied and if the body force density components remain continuous and bounded within the elements, no matter of their size.

Completeness with respect to C is not however a necessary condition for convergence. Completeness with respect to a subset $C' \subset\subset$ will indeed be sufficient, if the exact solution belongs to C'.

Assume indeed that all the displacement components of every field in C' verify a certain set of linear relations

$$\mathbf{R}\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{77}$$

in which $\mathbf{R}$ may be a differential operator.

Consider now polynomial expressions for the displacements, within a general finite element, and assume that the completeness criterion with respect to C is verified. Let C_n be the family of fields piecewise defined by such polynomial expressions made compatible by reduced compatibility conditions.

The introduction of Equation 77 implies a linear relationship between the coefficients of the polynomial expressions which generally involves the constant and linear terms. Such terms cease thus to be arbitrary and completeness with respect to C is therefore destroyed. Completeness with respect to C' will however still be maintained *if the relations between the coefficients are only those which result from Equation 77*. Let C_n' be the family of fields piecewise defined by polynomial expressions obeying such requirement and made compatible by the same reduced compatibility conditions as the fields of C_n.

The total number of independent coefficients corresponding to C_n is larger than the total number corresponding to C_n'. As the number of independent coefficients equals the number of nodal displacements, C_n corresponds to a larger number of nodes and nodal displacements than C_n' and, therefore, to a stiffness matrix $\mathbf{K}_n$ of larger order than the stiffness matrix $\mathbf{K}_n'$ corresponding to C_n'. Let $\mathbf{q}_n$ and $\mathbf{q}_n'$ be the vectors of nodal displacements corresponding to C_n and C_n'.

As the reduced compatibility conditions were supposed the same, both for C_n and C_n', C_n' is a subset of C_n. The reduced compatibility conditions are assumed such that the rigid body motion of each single element is prevented, so that matrices $\mathbf{K}_n$ and $\mathbf{K}_n'$ are both definite positive.

To each field in C_n' corresponds a displacement vector $\mathbf{q}_n$, as well as a displacement vector $\mathbf{q}_n'$. The elements of vector $\mathbf{q}_n$ may be deduced from the corresponding vector $\mathbf{q}_n'$ by using the polynomial expressions of the displacements to determine the supplementary nodal displacements.

Let $\mathbf{q}_{an}$ be the displacement vector which minimizes F_n in C_n.

The expression of F_n for the fields of C_n may be given, according to Equation 28, by

$$F_n = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{an})^T \mathbf{K}_n (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{an}) - \frac{1}{2}\mathbf{q}_{an}^T \mathbf{K}_n \mathbf{q}_{an} \tag{78}$$

As C_n' is contained in C_n , the expression of F_n for the fields of C_n' can also be given by Equation 78.

F_n will be a minimum in C_n' if the first term in Equation 78 is a minimum. But such first term represents half of the square of the distance between the field corresponding to $\mathbf{q}_n$ and the field $\mathbf{u}_{an}$ corresponding to $\mathbf{q}_{an}$. The field which minimizes F_n in C_n' is thus the one in C_n' whose distance to $\mathbf{u}_{an}$ is a minimum.

Consider the sequence $\{\mathbf{u}_{an}\}$ of the approximate solutions obtained by minimizing F_n in each family C_n. If the body force density components remain bounded within each element, no matter the size, the sequence $\{\mathbf{u}_{an}\}$ converges to the exact solution.

But the exact solution was supposed to belong to C' and, since sequence $\{C'_n\}$ is complete with respect to C', there exists a field $u''_{an} \subset C'_n$ whose distance to the exact solution tends to zero when n tends to infinity.

The distance between u_{an} and the exact solution also tends to zero. This means that the distance between u_{an} and u''_{an} tends to zero.

As the distance between u_{an} and the field u'_{an} which minimizes F_n in C'_n is the minimum distance between u_{an} and any field in C'_n, it follows that the distance between u_{an} and u'_{an} cannot be larger than the distance between u_{an} and u''_{an}. Therefore, u'_{an} tends to u_{an}, and thus to the exact solution.

Completness with respect to a set $C' \subset C$ which contains the exact solution, and the continuity and boundedness of the body force density components, were thus proved to be sufficient conditions for convergence.

It is now easy to establish convergence criteria for the simplified theories. The reasoning will be exemplified with the theory of plates (Reference 9), in which the displacements are the normal displacement, U_3, and two rotations, I_1 and I_2. We assume such magnitudes referred to a system of cartesian orthogonal coordinates, x_1, x_2, x_3. The middle plane of the plate corresponds to $x_3 = 0$.

The equilibrium equation are

$$N_{\alpha 3,\alpha} + p_3 = 0 \tag{79}$$

$$M_{\alpha\beta,\alpha} - N_{\beta 3} + m_\beta = 0 \tag{80}$$

and the strain-displacement relations are

$$e_{\alpha 3} = U_{3,\alpha} + I_\alpha \tag{81}$$

$$K_{\alpha\beta} = I_{\beta,\alpha} \tag{82}$$

In these equations, moments are denoted by $M_{\alpha\beta}$, transverse forces by $N_{\alpha 3}$, transverse shear deformations by $e_{\alpha 3}$ and curvatures by $K_{\alpha\beta}$. Greek indices can take up the numerical values 1 and 2.

Assume the stress-strain relations to be of the form

$$N_{\alpha 3} = H_{\alpha\beta}\, e_{\beta 3} \tag{83}$$

$$M_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta\gamma\delta}\, K_{\gamma\delta} \tag{84}$$

The equilibrium equations expressed in terms of displacement are then

$$H_{\alpha\beta}\,(U_{3,\beta\alpha} + I_{\beta,\alpha}) + p_3 = 0 \tag{85}$$

$$H_{\alpha\beta\gamma\delta}\, I_{\delta,\alpha\gamma} - H_{\beta\gamma}\,(U_{3,\gamma} + I_\gamma) + m_\beta = 0 \tag{86}$$

if the elastic coeficients $H_{\alpha\beta}$ and $H_{\alpha\beta\gamma\delta}$ are constant all over the domain.

Assume first that the transverse shear deformation is not neglected. The results obtained in Section V are then directly applicable. This means that convergence will be obtained if completeness with respect to C is achieved and if the body force density components remain continuous and bounded within the elements, whatever their size.

We remember that the body force density components, that is, the elements of vector χ, are in this case both the applied force and moment distribution densities, p_3, m_1 and m_2. Equations 85 and 86 show that such magnitudes will be continuous and bounded if the displacements (U_3, I_1 and I_2) together with their first and second derivatives, are continuous and bounded.

Completeness with respect to C will be obtained if the displacements are expressed within each element by

$$I_1 = a_{10} + a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + P_1^{(2)} \tag{87}$$

$$I_2 = a_{20} + a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + P_2^{(2)} \tag{88}$$

$$U_3 = a_{30} + a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + P_3^{(2)} \tag{89}$$

in which $P_i^{(2)}$ denotes a polynomial whose terms are at least of the second degree. The coeffi-

cients a_{ij} must be arbitrary and the polynomials $P_i^{(2)}$ can vanish for any value of them.

Assume now that the transverse shear deformation is negligible, that is,

$$e_{\alpha 3} = 0 \tag{90}$$

This is exactly so if the elastic cœfficients $H_{\alpha\beta}$ are supposed unbounded.

Introducing Equation 90 into Equation 81 there results

$$I_\alpha = -U_{3,\alpha} \tag{91}$$

which is a particularization of Equation 77.

Now let

$$P_3^{(2)} = a_{33} x_1^2 + a_{31} x_1 x_2 + a_{35} x_2^2 + P_3^{(3)} \tag{92}$$

Introducing Equations 89 and 92 into Equation 91, there results

$$I_1 = - a_{31} - 2 a_{33} x_1 - a_{34} x_2 - P_{3,1}^{(3)} \tag{93}$$

$$I_2 = - a_{32} - a_{34} x_1 - 2a_{35} x_2 - P_{3,2}^{(3)} \tag{94}$$

Comparing Equations 87 and 88 with Equation 93, it becomes clear that a set of linear relations has been introduced between the coefficients α_{ij}.

Completeness is still achieved, however, with respect to the subset C′ of the fields of C with vanishing transverse shear deformation (*), provided the coefficients a_{3i} $(i = 0, \dots, 5)$ are all arbitrary. Such completeness, together with the continuity and boundedness of the body force density components, was shown to be sufficient for convergence if the exact solution belongs to C′, as it is supposed to.

(*) As C is the set of the fields whose displacements are continuous and bounded, together with their first and second derivatives, C′ is, by virtue of Equation 91, the set of the fields in which displacement U_3 is continuous and bounded, together with its derivatives of order up to three.

As $(U_{3,\gamma} + I_\gamma)$ vanishes and the elastic coefficients $H_{\beta\gamma}$ are unbounded, Equations 85 and 86 cannot be used for the discussion of which derivatives must be kept continuous and bounded in order that m_1, m_2 and p_3 be also continuous and bounded.

Such difficulty may be removed by remarking that the exact solution is in this case the limit of a sequence of exact solutions corresponding to increasing values of the elastic coefficients $H_{\beta\gamma}$. Each one of such exact solutions is the limit of a sequence of approximate solutions $\{u_{an}\}$ if the completeness criterion with respet to C and the condition of boundedness and continuity of the displacements and their first and second derivatives are respected. Such conditions must still be valid for the limit case.

As by virtue of Equation 91, the continuity and boundedness of the rotations and their first and second derivatives are insured by the continuity and boundedness of the first, second and third derivatives of U_3, it becomes clear that the convergence conditions for the simplied theory of plates are simply the arbitrariness of the coefficient α_{3i} $(i = 0, 1, \dots 5)$ and the boundedness and continuity within each element of U_3 and of its first, second and third derivatives.

SECTION VII

CONCLUSIONS

The results of the present paper may be summarized as follows:

a) A very simple completeness criterion has been given with respect to the set C (to which the exact solution is assumed to belong) of the compatible elastic fields whose displacement second derivatives remain continuous and bounded within each element, whatever the size.

b) The completeness criterion becomes a convergence criterion whenever compatibility is not violated across the element boundaries (Ritz method).

c) Completeness with respect to C also ensures convergence in any case, i.e., even if com-

patibility is violated, whenever the body force density components corresponding to the successive approximate solutions remain continuous and bounded within the elements as their size decreases indefinitely.

d) Continuity and limitation of the displacement derivatives of order up to two ensures continuity and limitation of the body force density components, so that convergence to the exact solution will be obtained whenever completeness is achieved and such derivatives remain continuous and bounded within the elements.

e) The condition of completeness with respect to C is not a necessary condition for convergence. Completeness with respect to a subset $C' \subset C$ which contains the exact solution is sufficient. This conclusion makes it possible to derive convergence criteria for the simplified theories which result from neglecting the transverse shear deformation.

f) In what concerns plats, an important subset of C is the set C′ of the fields of C with vanishing transverse shear deformation. The completeness criterion with respect to C′ is simply that the transverse displacement U_3 be given by

$$U_3 = a_{30} + a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_1^2 + \\ + a_{34} x_1 x_2 + a_{35} x_2^2 + P_3^{(3)} \qquad (95)$$

in which the cœfficients a_{3i} $(i = 0, 1, \ldots 5)$ are arbitrary. The polynomial $P_3^{(3)}$ can vanish for any values of the coefficients, and the rotations I_1, and I_2 must be deduced by using Equation 91.

g) In the case of the simplified theory of plates, suficient conditions for convergence are completeness with respect to C′, and the continuity and limitation, within each element, of the derivatives of U_3, of order up to three, corresponding to the sucessive approximate solutions.

h) Completeness with respect to C′ is by iself, however, a sufficient condition for convergence whenever compatibility (continuity of U_3, I_1 and I_2) between elements is not violated.

It remains to apply these conclusions to actual cases.

In what concerns two- and three-dimensional elasticity, conformity is easy to achieve. Convergence will then be obtained if the completeness criterion is obeyed. Completeness and the condition of the body force density components remaining continuous and bounded within each element (this is mainly the case if the body forces vanishes, as happens frequently) would however ensure convergence even if conformity were not respected.

In what concerns plates (simplified theory), conformity has not been easy to achieve. If it is not achieved, the completeness criterion (with respect to C′) will be sufficient for convergence. If it is not achieved, convergence is ensured only when both the completeness criterion and the condition of the derivatives of the displacements of order up to three remaining continuous and bounded within each element are respected.

As the expressions for U_3 are polynomials at least of the third degree, the third derivatives of U_3 generally do not vanish and it may happen that they increase beyond all limit when the size of the elements decreases indefinitely.

This is why the mesh plays a role in convergence. Indeed, some types of mesh (like the union jack mesh in Reference 5, lead to unbounded third derivatives of U_3, whereas more regular types of mesh lead to bounded third derivatives of U_3, and thus to convergence.

Is is possible to check the limitation of the third derivatives by inspecting the sequence of the approximate solutions, or by examining the behavior of groups of elements (Reference 5). Such procedures do not allow prediction of convergence before any computations have been made, but they make it possible to know that the sequence converges to the exact solutions, even if such exact solution is not available.

SECTION VIII

REFERENCES

1. S. G. Mikhlin — *Variational Methods of Mathematical Physics*. New York, Pergamon Press, 1963.

2. E. R. Arantes Oliveira — Theoretical Foundations of the Finite Element Method, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 4, 4, No. 10, October 1968, pp 929-952.

3. S. W. Key — *A Convergence Investigation of the Direct Stiffness Method*. Ph. D. Dissertation, University of Washington, 1966.

4. Pin Tong and T. H. H. Pian — The Convergence of Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 3, No. 5, pp. 865-879, September 1967.

5. G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz — Triangular Elements in Plate Bending, Conforming and Non-Conforming Solutions, *Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson AFB, Ohio, (AFFDL--TR 66-80) 1915.

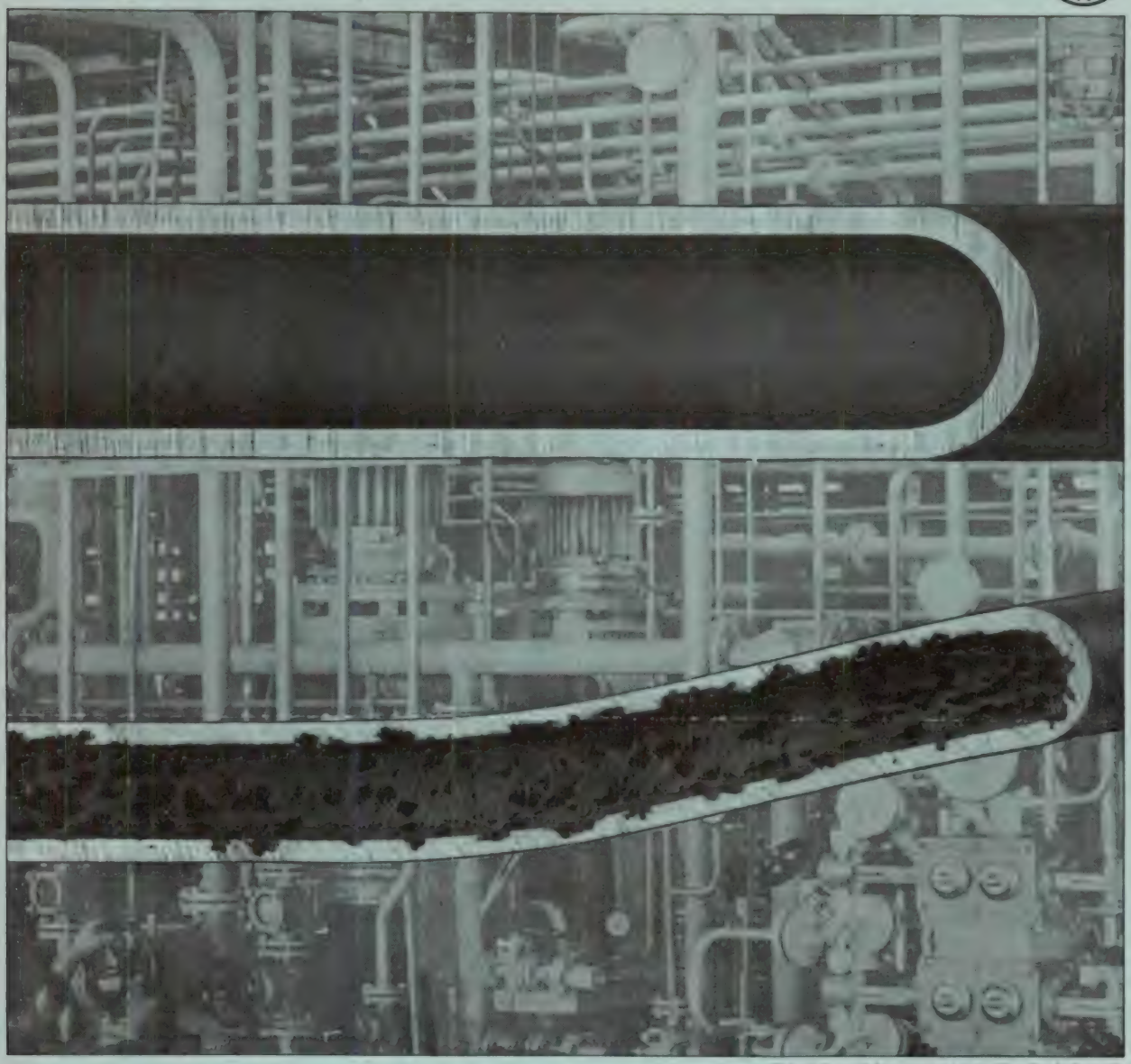
6. O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung — *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics* London, Mc Graw Hill, 1967.

7. R. W. Clough and J. L. Tocher — Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending, *Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson AFB, Ohio, (AFFDL-TR-66-80) 1965.

8. R. Courant and D. Hilbert *Methods of Mathematical Physics*, Vol II. International Publishers (1962).

6. E. R. Arantes Oliveira — *Introdução à Teoria das Estruturas*. Lisboa, Author's edition, 1966.

Bayer



Tubos de caldeira, com e sem aplicação de Levoxin

Levoxin supera a protecção anticorrosiva com hidrazina. Considerada até hoje a mais eficaz.

®Levoxin é um novo tipo de hidrazina com capacidade de reacção muito mais elevada, que proporciona uma segurança de serviço ainda maior nas suas instalações.
Levoxin protege da corrosão todo o circuito de água-vapor mediante extrema aceleração da ligação de oxigénio, alcalinização, favorecimento da formação de camada protectora de magnetite, e graças ao efeito inibidor.
É muito vasto o campo de aplicação deste produto Bayer: em caldeiras de toda a espécie, tubagens de vapor e de água condensada, aquecimentos a distância e por circulação, sistemas de refrigeração fechados. E também para a conservação, em húmido, de instalações que vão estar imobilizadas passageiramente.
Condições económicas e segurança de serviço são os factores decisivos que falam a favor de Levoxin. Graças ao emprego de Levoxin, reduz-se a ocorrência de grandes reparações e evita-se dispendiosas falhas de funcionamento.

Informação 778 AA

Queira enviar este cupão, colado sobre papel timbrado, à:
BAYER PORTUGAL s.a.r.l.
Apartado 2365, LISBOA
Apartado 40, PORTO

☐ Pedimos o envio do prospecto sobre Levoxin.
☐ Pedimos conselhos para o seguinte problema:

_____

levoxin

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

TELEF. 5 20 91/2/3 — OVAR - PORTUGAL — TELEG. FELTROS

FELTROS TECIDOS
TECIDOS FILTRANTES E INDÚSTRIAIS

de fibras naturais ou sintéticas, puras ou em mistura
em qualques formato e dimenção
para

Indústria papeleira
Pastas para papel
Fibrocimento
Curtumes
Industriais têxteis
Estamparia
Acabamentos
Lavandarias
Hospitais e Hotéis
Lonas em sintético

Correias transportadoras
Indústrias químicas
Filtração de água
Cervejas
Refrigerantes
Lacticínios
Azeite e produtos oleosos
Produtos gordurosos
Geleias

Vinhos
Açúcar
Farinhas alimentares
Sabões e detergentes
Cerâmicas
Captação e recuperação de poeiras
Despoeiragens
Tubos de ventilação
etc., etc., etc.

OS NOSSOS SERVIÇOS TÉCNICOS ESTÃO SEMPRE À VOSSA INTEIRA DISPOSIÇÃO PARA ESTUDAR QUALQUER PROBLEMA DE TECIDOS INDURTRIAIS

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESIRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
Tr. do Guarda Mór, 13-r/c
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
R. Francisco Newton, 389/393
C. P. 2178 - Tel. 81 89 7

MOÇAMBIQUE
L. Marques - C. P. 982 - Tel. 74 11 21
Beira - C. P. 1002 - Tel. 7 14 97

C. D. U. 536.2 : 518.5

TEORIA DA FONTE MÓVEL (CÁLCULO DA DEPENDÊNCIA TEMPERATURA-TEMPO)

por A. M. R. MARRECAS
Departamento de Eng.ª Mecânica
Lab. de Termodinâmica Aplicada
Inst. Sup. Técnico
NEEM — IAC

RESUMO

Utilizando um computador IBM 1620, estuda-se a evolução da distribuição de temperaturas em função do tempo, para uma fonte móvel de calor de velocidade e débito calorífico constantes, em meios infinito e semi-infinito, resumindo-se os resultados sob a forma de gráficos. Usam-se variáveis adimensionais.

SYNOPSIS

Nondimensional temperature-time dependence for both infinite and semi-infinite solids heated by a constant velocity moving heat source is put under graphical form. A 1620 IBM computer is used.

1. NOMENCLATURA

1.1 — Valores dimensionais

T — temperatura
T_o — temperatura inicial
T_r — temperatura de referência
Q — débito calorífico da fonte
V — velocidade da fonte
α — difusividade térmica
γ — peso específico
$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
t — tempo
$(0, x, y, z)$ — referencial associado à fonte

1.2 — Valores adimensionais

$$\theta = \frac{T - T_o}{T_r - T_o} \text{ — temperatura adimensional}$$

$$n = \frac{Q\,V}{4\,\pi\,\alpha^2\,\gamma\,c\,(T_r - T_o)} \text{ — parâmetro operatório}$$

$$\rho = \frac{v\,r}{2\,\alpha} \text{ — raio vector adimensional}$$

$$\lambda = \frac{Vx}{2\,\alpha};\ \psi = \frac{Vy}{2\,\alpha};\ \xi = \frac{Vz}{2\,\alpha} \text{ — x, y, z adimensionais, respectivamente}$$

$$\sigma = \frac{V}{2}\sqrt{\frac{t}{\alpha}} \text{ — tempo adimensional}$$

u, v — constantes com valores possíveis entre o e $+\infty$

2. INTRODUÇÃO

Retoma-se o tratamento do regime transiente da fonte móvel num espaço tridimensional, utilizando a expressão de distribuição de temperaturas na forma que parece mais adaptada às aplicações em meio semi-infinito interessadas neste fenómeno [2]:

$$\frac{\theta}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot e^{-\lambda}\left\{e^{-\rho}\,\mathrm{erfc}\left[\frac{\rho}{2\,\sigma} - \sigma\right] + e^{\rho}\,\mathrm{erfc}\left[\frac{\rho}{2\,\sigma} + \sigma\right]\right\} \quad (1)$$

3. TRATAMENTO MATEMÁTICO

3.1 — Objectivo

Resume-se ao traçado das «isotérmicas» θ/n no plano $\xi = o$, para vários σ. Para tal, procede-se ao corte do espaço por planos $\psi = u$ e $\lambda = v$, determinando-se θ/n nos pontos intersecção dos conjuntos de três planos. A gama de valores de λ considerada será $-100 \leqslant \lambda \leqslant 2$.

3.2 — Processamento

Fez-se através de um computador IBM 1620. O programa, em linguagem FORTRAN II, reproduz-se na gravura n.º 1. As funções erf foram substituídas por um desenvolvimento aproximado escolhido entre os que constam de [4] e que, envolvendo constantes que «cabem» no computador IBM 1620, conduz a resultados com erro de valor perfeitamente satisfatório e, principalmente, garante a convergência da segunda parcela da chaveta de (1). Não se transcreve por ser de imediata identificação através do programa.

```
      DIMENSION SIGMA(50),CAMB(60),RO(60),TETAN(60),PSI(10)
    1 FORMAT(4F9.7)
    2 FORMAT(3I3)
    4 FORMAT(F0.2)
      FORMAT(F7.3)
      FORMAT(F5.1)
   11 FORMAT(20X 4HLAMB 9X.5HTETAN./)
   11 FORMAT(4HPSI= F5.2)
   12 FORMAT(6HSIGMA=,F4.0)
   70 FORMAT(17X,F7.3,5X,E14.0)
      READ 1,A1,A2,A3,P
      READ 2,N,M,K
      DO 3 I=1,N
    3 READ 4,CAMB(I)
      DO 5 J=1,M
    5 READ 6,PSI(J)
      DO 7 L=1,K
    7 READ 8,SIGMA(L)
      BEGIN TRACE
      DO 60 L=1,K
      PRINT 12,SIGMA(L)
      DO 60 J=1,M
      PRINT 11,PSI(J)
      DO 9 I=1,N
      RO(I)=SQRT(CAMB(I)**2+PSI(J)**2)
      X1=RO(I)/(2.*SIGMA(L))-SIGMA(L)
      X2=RO(I)/(2.*SIGMA(L))+SIGMA(L)
      IF (X1)30,30,40
   30 X1=X1*(-1.)
      T=1./(1.+P*X1)
      P1=A1*T+A2*T**2+A3*T**3
      Q=EXP(X1**2)
      R=P1/Q
      EFCX1=2.-R
      GO TO 50
   40 CONTINUE
      T=1./(1.+P*X1)
      P1=A1*T+A2*T**2+A3*T**3
      Q=EXP(X1**2)
      R=P1/Q
      EFCX1=R
   50 T2=1./(1.-P*X2)
      P2=A1*T2+A2*T2**2+A3*T2**3
      Q2=EXP(X2**2)
      R2=P2/Q2
      EFCX2=R2
      TETA=(EFCX1/EXP(RO(I))+EFCX2*EXP(RO(I)))/(2.*RO(I))
    9 TETAN(I)=TETA/EXP(CAMB(I))
      PRINT 10
      DO 60 I=1,N
   60 PRINT 70,CAMB(I),TETAN(I)
      END TRACE
      STOP
      END
```

Fig. 1

«A instrução «begin-end» «frace», incluída no programa, será ignorada pelo computador se a chave operatória n.º 4 se encontrar na posição «off». Ela permitirá, se desejado, acompanhar a evolução das variáveis intermediárias».

3.3 — Resultados

Reproduzem-se em gráficos $\theta/n = F(\lambda,\psi)$ nas gravuras n.os 2 a 8. Dada a simetria do fenómeno, omitiu-se, por desnecessária, a metade inferior dos gráficos.

4. COMENTÁRIO

4.1 — Os resultados calculados, para valores de σ elevados (figs. 2 a 5), conduzem a gráficos

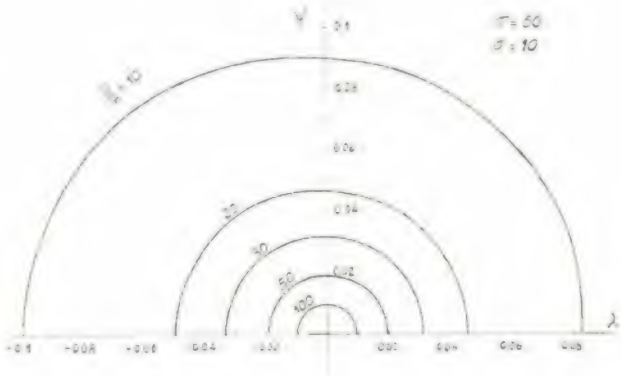


Fig. 2

inteiramente concordantes com os inclusos em [3] (regime estacionário do fenómeno em variáveis adimensionais).

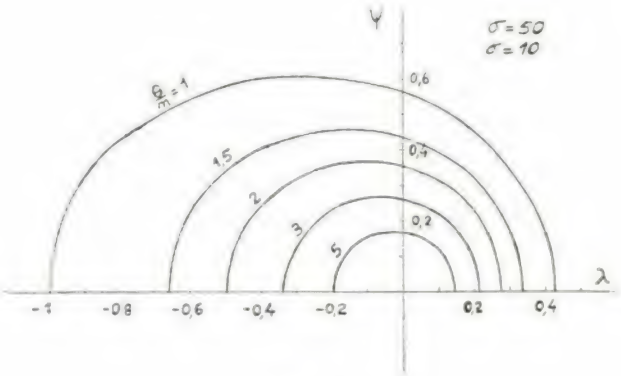


Fig. 3

4.2 — O gráfico n.º 6, para $\sigma = 5$, demonstra que, para menores valores deste parâmetro, se verifica a «contracção», na cauda da fonte, das «isotérmicas» de menor valor. Neste caso apresenta-se apenas uma figura porque as isotérmi-

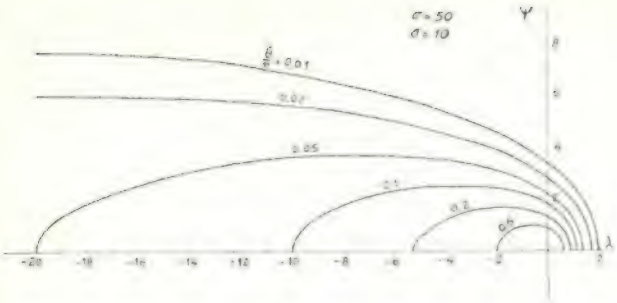


Fig. 4

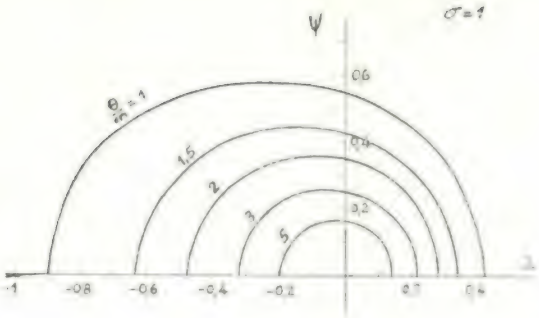


Fig. 7

cas superiores a 0,02 serão coincidentes com as do regime estacionário. A tentativa da função erfc da primeira parcela da chaveta de (1) para,

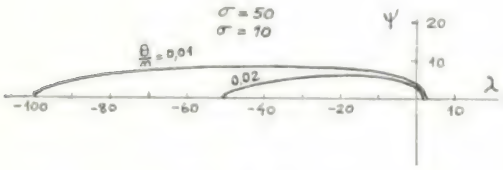


Fig. 5

através do seu argumento negativo, conservar o campo de temperaturas em valores vizinhos dos

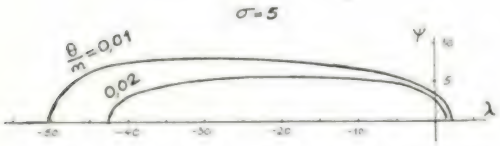


Fig. 6

estacionários é vencida pelo crescimento inevitável de ρ quand λ atinge valores de ordem — 35 a — 50.

4.3 — As figuras para $\sigma = 1$ mostram agora, na cauda da fonte, um compacto grupo de isotérmicas, fechando-se todas para $\lambda > -5$. Como é evidente, as modificações na frente da fonte são muito menos sensíveis. As «isotérmicas» superiores a 5 serão, pràticamente, idênticas às estacionárias.

5. CONCLUSÕES

1) Em processos envolvendo fontes móveis que interessem o meio infinito, as «isotérmicas» θ/n serão ainda as mesmas, se forem usadas as expressões definidas na nomenclatura. Apenas ao separar θ de n, para obter os seus valores correctos, será necessário dividir ambos por dois.

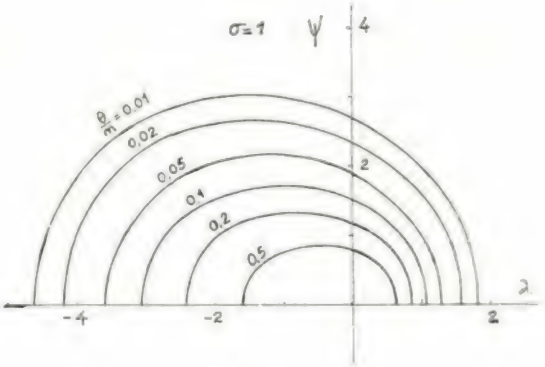


Fig. 8

2) Só o conhecimento dos parâmetros particulares dum processo, bem como da natureza do mesmo, poderá permitir definir, de acordo com o fenómeno específico a observar, o interesse da consideração do regime transiente — pela sua duração — nesse processo.

3) O programa usado permitirá a investigação de qualquer σ particular desejado.

AGRADECIMENTO

— Ao Eng.º Silvestre Dias Antunes pela introdução ao uso do computador IBM 1620.

— À IBM PORTUGUESA que, com a cedência do computador IBM 1620, permitiu a realização deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

[1] MARRECAS; Técnica n.º 372, pp. 79-82, 1967.
[2] MARRECAS; Técnica n.º 402, pp. 65-66, 1970.
[3] CHRISTENSEN; DAVIES; GJERMUNDSEN; Brit. Weld. Journal, pp. 54-75, vol. 12, n.º 2, Fev., 1965.
[4] ABRAMOWITZ e SEGUN; «Handbook of Mathematical Functions», pp. 299, Dover Publications, New York.

é vasto o nosso campo de acção

6 DELEGAÇÕES NA METRÓPOLE E ULTRAMAR

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

SIDERURGIA NACIONAL — Seixal — Vista aérea da Instalação de Laminagem (2.ª fase) — Grandes naves fabris (470 metros)

OBRAS PÚBLICAS
CONSTRUÇÃO CIVIL–INDUSTRIAL E URBANA

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS • CONSOLIDAÇÕES
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS • SILOS E CHAMINÉS
INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

é vasto o nosso campo de acção

6 DELEGAÇÕES NA METRÓPOLE E ULTRAMAR

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

MINISTÉRIO DO ULTRAMAR — Direcção-Geral de Obras Públicas e Comunicações — Ilha do Fogo (Cabo Verde) — Obras Portuárias de Vale de Cavaleiros: Molhe Acostável, doca e varadouro.

OBRAS PÚBLICAS
CONSTRUÇÃO CIVIL–INDUSTRIAL E URBANA

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS • CONSOLIDAÇÕES
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS • SILOS E CHAMINÉS
INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

C. D. U. 539.319 : 516.5.516.5

UTILIZAÇÃO DE COORDENADAS PARABÓLICAS NA ANÁLISE DE TENSÕES DE UM CORPO DE FORMA PARABÓLICA

por ANTÓNIO DUARTE SILVA
EDUARDO C. MARÇAL GRILO
Engenheiros mecânicos, Estagiários para Especialistas do Serviço Técnico Geral do LNEC
Assistentes do I.S.T.

RESUMO

Pretende-se com este trabalho deduzir a expressão geral do equilíbrio em coordenadas parabólicas, partindo da expressão geral do equilíbrio em coordenadas curvilíneas.

Justifica-se em linhas gerais o emprego das coordenadas parabólicas no estudo de um corpo cujo contorno tenha a forma parabólica.

SYNOPSIS

A general expression of equilibrium in parabolic coordinates is obtained, starting from the general equation of equilibrium in curvilinear coordinates.

In general terms it is justified the use of parabolic coordinates in the stress analysis for a body of parabolic form.

NOTAÇÃO

h — factor de escala
p — distância
r — raio de curvatura
x, y, z, — coordenadas cartesianas
u, v, z, — coordenadas parabólicas
(α, β) — coordenadas curvilíneas
σ — tensão normal
τ — tensão tangencial

1 — INTRODUÇÃO

Ao fazer-se o estudo da distribuição de tensões num corpo contínuo qualquer, um dos primeiros pontos que se deve ter em atenção é a escolha de um sistema de coordenadas conveniente.

Um dos factores que condicionam a escolha do sistema de coordenadas é a forma que o corpo apresenta, uma vez que a simplicidade do estudo a realizar está intimamente relacionada com o binário sistema de coordenadas — forma do corpo.

Vamos, neste artigo, justificar o emprego de coordenadas parabólicas no estudo de um corpo com forma parabólica, e deduzir as equações de equilíbrio naquele sistema de coordenadas.

2 — COORDENADAS PARABÓLICAS

2.1 — Utilização

Um dos mais importantes condicionamentos na escolha das coordenadas a utilizar no estudo de qualquer corpo é a forma que o corpo apresenta, sobretudo pela necessidade de definir as condições de fronteira ou condições aos limites, isto é, os valores que os parâmetros em jogo tomam em pontos definidos do contorno do corpo.

Interessa-nos pois trabalhar com um sistema de coordenadas em que os valores das variáveis tomados na fronteira do corpo sejam aí valores constantes. Ora isto consegue-se para o caso de um corpo com forma parabólica, utilizando um sistema de coordenadas parabólicas.

As vantagens deste procedimento são análogas às que se obtêm quando se empregam coordenadas cartesianas no estudo de um corpo paralelipipédico ou coordenadas esféricas no estudo de um corpo esférico.

2.2 — Dedução das equações de equilíbrio

2.2.1 — Descrição do Sistema de Coordenadas

O sistema de coordenadas considerado é composto por duas parábolas co-focais com os mesmos eixos, conforme se ilustra na fig. 1.

«A família de curvas de $v = c^{te}$ e $u = c^{te}$ são cilindros parabólicos, cujos traços no plano xy se intersectam perpendicularmente e que têm os

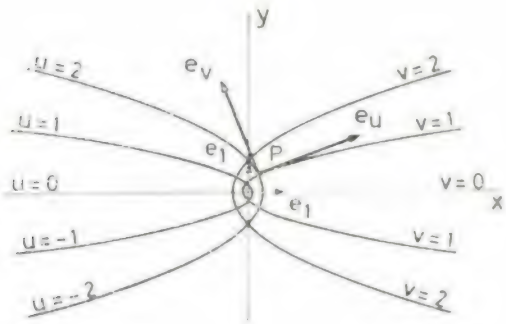


Fig. 1

vértices no eixo dos xx mas em lados opostos relativamente à origem. $z = c^{te}$ são planos, paralelos ao plano xy.

2.2.2 — Dedução matemática

Os valores de x e y em função de u e v são dados pelas expressões seguintes:

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

$$y = u\,v$$

A equação de equilíbrio em coordenadas curvilíneas para a direcção α é dada pela expressão (1) e torna-se necessário agora estabelecer as relações entre $d\alpha$, $d\beta$, r_α e r_β em termos do novo sistema de coordenadas.

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}}{r_\beta} - \frac{2\tau_{\alpha\beta}}{r_\alpha} = 0 \qquad (1)$$

Para determinar os valores de $d\alpha$ e $d\beta$ teremos que calcular os valores dos factores de escala que nos dão a transformação de $d\alpha$ e $d\beta$ em termos de du e dv.

Assim:

$$dx = u\,du - v\,dv$$

$$dy = u\,dv + v\,du$$

e $(dp)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$= (u^2 + v^2)(du)^2 + (u^2 + v^2)(dv)^2$$

logo os factores de escala são:

$$h_u = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$$

e

$$d\alpha = \sqrt{u^2 + v^2}\,du$$

$$d\beta = \sqrt{u^2 + v^2}\,dv$$

De modo a obter os valores de r_α e r_β, temos que determinar os seus valores através da expressão geral do raio de curvatura dado por

$$\frac{1}{r} = \frac{\dfrac{d^2 y}{d x^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{du}}{\dfrac{dx}{du}} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial v}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial u}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v + u\dfrac{dv}{du}}{u - \dfrac{dv}{du}v}$$

Para $v = \text{const.}$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v}{u}$

Fazendo agora

$$\xi = \frac{dy}{dx} = f\left(u, v, \frac{dv}{du}\right)$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d}{dx}(\xi)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{u\frac{dv}{du}+v}{u-v\frac{dv}{du}}\right)$$

$$= \frac{\left(du\frac{dv}{du}+u\frac{d^2v}{du^2}du+dv\right)\left(u-v\frac{dv}{du}\right)-\left(u\frac{dv}{du}+v\right)\left(du-dv\frac{dv}{du}-v\frac{d^2v}{du^2}du\right)}{\left(u-v\frac{dv}{du}\right)(udu-vdv)}$$

Fazendo

$$v' = \frac{dv}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(uv''+2v')(u-vv')-(uv'+v)[1-(v')^2-vv'']}{\left(u-v\frac{dv}{du}\right)^3}$$

$$= \frac{u^2v''-uvv'v''+2uv'-2v(v')^2-uv'-v+u(v')^3+v(v')^2+uvv'v''+v^2v''}{(u-vv')^3}$$

$$= \frac{u^2v''+uv'-v(v')^2-v+u(v')^3+v^2v''}{(u-vv')^3}$$

Para $v = \text{const.}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{v}{u^3}$$

e

$$\frac{1}{r_v = c.^t} = \frac{-\frac{v}{u^3}}{\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)^{3/2}}$$

$$r_v = \frac{\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)^{3/2}}{-\frac{v}{u^3}}$$

$$r_u = \frac{\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)^{3/2}}{-\frac{u}{v^3}}$$

Deste modo a expressão final será:

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\sigma_{uu}}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\tau_{uv}}{\partial v}+$$

$$+\frac{\sigma_{uu}-\sigma_{vv}}{\frac{\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)^{3/2}}{-\frac{u}{v^3}}}-\frac{2\tau_{uv}}{\frac{\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)^{3/2}}{-\frac{v}{u^3}}}=0$$

Para a direcção β

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\sigma_{vv}}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\tau_{vu}}{\partial u}+$$

$$+\frac{v}{u^3\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)^{3/2}}(\sigma_{vv}-\sigma_{uu})-$$

$$- \frac{2\,u\,\tau_{uv}}{v^3\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)^{3/2}} = 0$$

Simplificando:

Direcção "u":

$$\frac{\partial \sigma_{uu}}{\partial u} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} - \frac{u}{u^2+v^2}\left(\sigma_{uu}-\sigma_{vv}\right) -$$

$$- \frac{2\,v}{u^2+v^2}\,\tau_{uv} = 0 \qquad (2)$$

Direcção "v":

$$\frac{\partial \sigma_{vv}}{\partial v} + \frac{\partial \tau_{vu}}{\partial u} + \frac{v}{u^2+v^2}\left(\sigma_{vv}-\sigma_{uu}\right) -$$

$$- \frac{2\,u}{u^2+v^2}\,\tau_{uv} = 0 \qquad (3)$$

Estas expressões (2) e (3) são equações de equilíbrio para as direcções "u" e "v" num sistema de coordenadas parabólicas e deduzidas a partir das equações de equilíbrio em coordenadas curvilíneas na sua forma mais geral.

BIBLIOGRAFIA

Spiegel, M. R. — Vector Analysis.

CROMO DURO

A aplicação de depósitos de cromo no campo industrial, pelo sistema de electrodeposição, é relativamente recente. Inicialmente estes tratamentos eram sobretudo utilizados com fins decorativos, depositando uma ligeira camada de crómio sobre um revestimento geralmente de níquel, para se obter um aspecto brilhante e resistente à corrosão. Tais depósitos são macios e de pouco valor para a utilização industrial.

As propriedades do cromo, quando depositado em condições perfeitamente controladas, são tais que levaram à sua larga aplicação na moderna tecnologia mecânica. É o processo conhecido pelo nome de CROMAGEM DURA.

As propriedades que oferece o CROMO DURO, tanto no tratamento de peças novas como nas recuperadas, são principalmente as seguintes:

— elevada dureza (até cerca de 1000 Vickers).

— baixo coeficiente de atrito.

— alta resistência à corrosão e ao desgaste.

— ausência de distorção.

— possibilidade de aplicações locais.

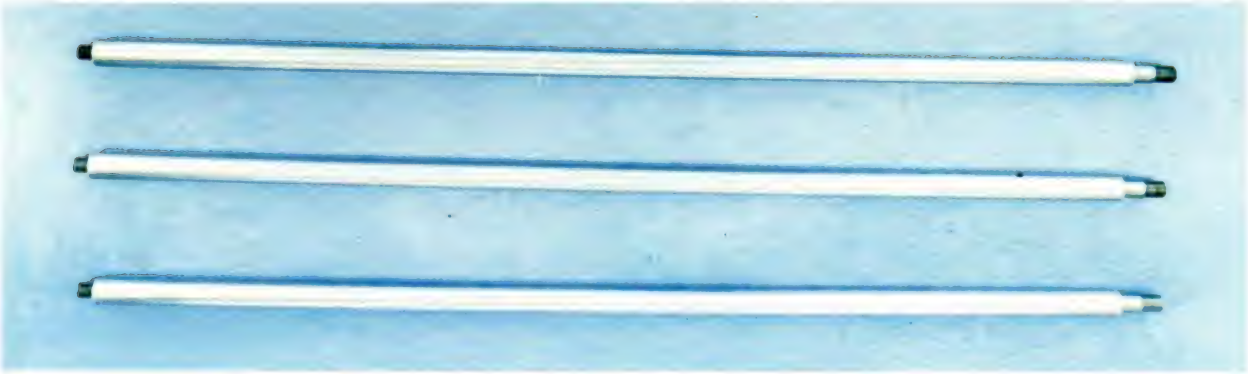
— aderência perfeita ao metal de base.

Existem três tipos de cromagem dura — ligeira, média e espessa. Para cada aplicação deve escolher-se o tipo mais conveniente.

Em qualquer dos casos, e mesmo que as peças sofram rectificação posterior, é necessário que sejam rectificadas e polidas antes de se efectuar o revestimento.

HASTE DE SERVO MOTOR

DIVERSAS PEÇAS DE MOTORES



HASTES DE MACACOS HIDRÁULICOS

O nosso Departamento Técnico está preparado para prestar esclarecimentos, estudar e propor as melhores soluções para os problemas que lhe forem submetidos.

METALIZAÇÃO

SOCIEDADE LISBONENSE DE METALIZAÇÃO, L.DA

TELEFONE 251 1031 ✻
TELEG. METALIZAÇÃO

APARTADO N.º 3
SACAVÉM — PORTUGAL

DESENVOLVIMENTOS ANTICORROSIVOS E DECORATIVOS ▪ ENSAIOS DE CORROSÃO ▪ RECUPERAÇÃO DE PEÇAS DE MÁQUINAS

DECAPAGEM • METALIZAÇÃO • PINTURAS INDUSTRIAS • GALVANIZAÇÃO • ELECTRODEPOSIÇÃO • PLASTIFICAÇÃO • SOLDADURA • RECTIFICAÇÃO

C. D. U. 537.313 : 518.4

CONCEITOS E PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DO MÉTODO DE CÁLCULO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS PELA TEORIA DOS GRAFOS

Por HERMÍNIO DUARTE-RAMOS
Engenheiro Electrotécnico (I. S. T.)
Assistente da U. L. (Angola)

RESUMO

Baseado nos conceitos da teoria dos grafos estudam-se as propriedades fundamentais relacionadas com a estrutura, planaridade, singularidade, corte e dualidade dos grafos. Para o cálculo de circuitos eléctricos definem-se as matrizes de incidência que interessam nos diferentes métodos: dos nós, das malhas, dos cortes e dos anéis.

SYNOPSIS

The basic conceptions of graph theory are presented and the following properties are studied: structure, planarity, singularity, cut and duality of graphs. For electrical network calculation the node, mesh, cut and loop incidence matrices are defined and discussed.

1. INTRODUÇÃO

A topologia (do grego «lugar» e «ciência») é a parte da geometria que, abstraindo das grandezas mensuráveis de natureza física ligadas à estrutura geométrica, tais como ângulos, comprimentos, secções, massa, resistividade, permeabilidade, etc., se ocupa do modo de ligação entre os diferentes elementos quaisquer que sejam as deformações contínuas sofridas por esses elementos.

A esfera e o cubo, por exemplo, são topològicamente iguais visto que em cada figura o interior é separado do exterior por superfícies topològicamente de igual valor, pois em ambos os casos se trata de superfícies simplesmente conexas (que se podem reduzir a um ponto por deformação contínua).

Qualquer figura, por exemplo uma circunferência, traçada sobre uma membrana de borracha é topològicamente a mesma que toda a figura resultante de qualquer deformação da membrana (sem a quebrar). Um rectângulo cujos lados e diagonais sejam fios de borracha é igual sob o ponto de vista topológico a qualquer figura com os mesmos nós e igual número de ramos mas com os lados deformados.

O caminho através de um labirinto ou o entrançado dos fios de renda ou ainda os nós dos cabos em marinharia são questões topológicas.

A electrotecnia, no cálculo de complexos circuitos eléctricos, serve-se da parte da topologia que estuda as configurações lineares, ou seja da *teoria dos grafos*, para obter um tratamento matemático simples, através de um método exacto e seguro, dando resposta às seguintes questões fundamentais: *Quantas equações são necessárias e suficientes para calcular um dado circuito eléctrico? Como se consegue definir um sistema de equações independentes?*

Uma vez obtido o sistema de equações a sua resolução processa-se pelos métodos da álgebra linear. Neste sentido o cálculo matricial permite a resolução de sistemas complexos de um modo elegante e simplificado.

Para se compreender contudo a aplicação do método de cálculo introduzem-se as noções fundamentais da teoria, repartidas em definições (que se indicam abreviadamente por DEF.) e respectivas propriedades (referenciadas pela abreviatura PROP.), de um modo sistemático esclarecendo-se gradualmente os conceitos essenciais.

O presente trabalho foi elaborado em 1969 a propósito do estudo das redes eléctricas na Cadeira «Aplicações de Electricidade II» do curso de Engenharia Electrotécnica da Universidade de Luanda.

2. CONCEITOS DA TEORIA DOS GRAFOS

2.1 — Estrutura dos grafos

DEF. 1 — **Grafo** *é toda a figura formada por nós e ramos* (fig. 1-a).

DEF. 2 — **Nó** de um grafo *é qualquer ponto de ligação de pelo menos dois ramos* (pontos 1 a 10 da figura 1-a).

DEF. 3 — **Nó principal** *é um nó que liga mais de dois ramos* (nós 2 a 10 da fig. 1-a).

DEF. 4 — **Nó secundário** *é um nó que liga apenas dois ramos* (nó 1 da fig. 1-a).

DEF. 5 — **Nó origem** *é um nó arbitrário tomado como referência.*

DEF. 6 — **Par de nós** *é o conjunto de dois nós quaisquer.*

PROP. 1 — Qualquer nó de um grafo constitui um par de nós com o nó origem.

DEF. 7 — **Ramo** de um grafo *é o elemento que liga dois nós.*

PROP. 2 — Eliminando os nós secundários o número total de ramos reduz-se de igual quantidade.

PROP. 3 — As extremidades dos ramos são nós, isto é, as extremidades de um ramo não fazem parte desse ramo (um ramo é aberto).

DEF. 8 — **Sub-grafo** de um dado grafo *é um grafo particular que contém apenas parte dos nós e ramos do grafo total* (fig. 1-b).

DEF. 9 — **Sub-grafo complementar** a um sub-grafo de um dado grafo *é o restante sub-grafo no grafo total* (fig. 1-b).

DEF. 10 — **Grafo** ou **sub-grafo linear** *é um grafo que contém apenas nós secundários excepto os nós extremidade* (fig. 1-c).

PROP. 4 — Exceptuando os nós extremidade de um grafo linear não fechado todos os restantes nós ligam apenas dois ramos.

DEF. 11 — **Percurso** entre dois nós de um grafo *é um sub-grafo linear tendo esses nós como extremidades* (fig. 1-d).

DEF. 12 — **Anel** de um grafo *é qualquer sub-grafo linear fechado do grafo* (fig. 1-e).

PROP. 5 — Num anel todos os nós ligam dois ramos.

PROP. 6 — Retirando um ramo a um anel obtém-se um percurso.

DEF. 13 — **Árvore** (1) de um grafo *é um sub-grafo que contém todos os nós do grafo ligados por ramos sem a formação de anéis* (fig. 1-f).

PROP. 7 — Num grafo existe pelo menos uma árvore.

PROP. 8 — Cada ramo de um grafo pode fazer parte de uma árvore.

(1) Esta noção é por vezes referida por árvore completa [1].

PROP. 9 — Uma árvore contém em geral nós principais e secundários.

PROP. 10 — Numa árvore existe apenas um percurso entre cada par de nós.

PROP. 11 — Não existe nenhum anel numa árvore.

DEF. 14 — **Co-árvore** de um grafo *é o sub-grafo complementar de uma árvore do grafo* (fig. 1-f).

PROP. 12 — Um grafo é definido por uma árvore e respectiva co-árvore.

DEF. 15 — **Haste** de uma árvore *é qualquer ramo de uma árvore do grafo.*

PROP. 13 — Quando se suprime uma haste a uma árvore esta divide-se em duas árvores (considerando um nó isolado como uma árvore).

DEF. 16 — **Árvore linear** de uma árvore *é um percurso entre dois nós extremidade contendo todos os nós principais da árvore* (fig. 1-g).

DEF. 17 — **Ramificação** de uma árvore *é uma haste que liga um nó principal a um nó extremidade da árvore excluindo a correspondente árvore linear* (fig 1-g).

PROP. 14 — Uma árvore que seja um grafo linear não tem nenhuma ramificação (pois não possui nenhum nó principal).

DEF. 18 — **Corda** de um grafo em relação a uma árvore *é qualquer ramo da respectiva co-árvore.*

PROP. 15 — Qualquer corda não pertence à árvore do grafo.

PROP. 16 — Num grafo existe sempre igual número de cordas independentemente da árvore escolhida.

PROP. 17 — Um grafo pode definir-se por uma árvore e pelas relativas cordas.

DEF. 19 — **Anel-base** de um grafo *é um anel que contém apenas uma corda* (fig. 1-h).

PROP 18 — Num grafo existem tantos anéis-base quantas as cordas.

PROP. 19 — Juntando uma corda a uma árvore obtém-se um anel-base, que é a malha contituída pela corda e pelo percurso única na árvore entre as extremidades relativas à corda.

DEF. 20 — **Grau de conexidade** c de um grafo *é o número de anéis-base (ou de cordas) do grafo.*

PROP. 20 — O grau de conexidade é independente da árvore escolhida, sendo ùnicamente função do número de ramos r e do número de nós n do grafo.

PROP. 21 — Uma árvore é um grafo simplesmente conexo (uma vez que não contém nenhuma corda).

PROP. 22 — Juntando uma corda a uma árvore forma-se um grafo de conexidade unitária (por se formar um anel-base).

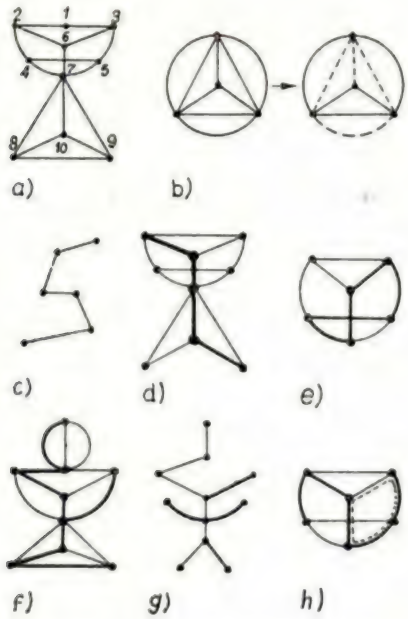


Fig. 1 — Elementos estruturais dos grafos.
a) Grafo com n = 10 nós (1 secundário) e r = 16 ramos;
b) Sub-grafos complementares;
c) Grafo linear;
d) Percurso;
e) Anel;
f) Árvore e co-árvore;
g) Árvore linear e 4 ramificações;
h) Anel-base.

2.2 — Planaridade

DEF. 21 — **Transfiguração** de um grafo *consiste na alteração da sua forma por deformação contínua sem perda de conexidade* (fig. 2-a).

DEF. 22 — **Grafos semelhantes** *são os que por transfiguração podem assumir a mesma configuração geométrica* (fig. 2-a).

PROP. 23 — É condição necessária mas não suficiente para que dois grafos sejam semelhantes que tenham igual grau de conexidade.

DEF. 23 — **Cruzamento** de ramos de um grafo *é um ponto onde se cruzam dois ou mais ramos sem que seja um nó*, ou seja, *é um ponto onde se verifica simples sobreposição dos ramos* (fig. 2-b).

PROP. 24 — O cruzamento de dois ramos quaisquer pode evitar-se pela transfiguração de um dos ramos (fig. 2-b).

DEF. 24 — **Cruzamento autêntico** ou **encruzilhada** *é um cruzamento que não se pode evitar pois a transfiguração conduz ao deslocamento do cruzamento para outros ramos* (fig. 2-c).

PROP. 25 — Uma encruzilhada não é ligada a dois ramos determinados mas pode deslocar-se para diferentes ramos por transfiguração do grafo.

DEF. 25 — **Grafo planar** *é um grafo que se pode representar num plano ou numa esfera sem cruzamentos* (fig. 2-b).

PROP. 26 — Uma árvore é um plano planar.

DEF. 26 — **Malha** de um grafo planar *é todo o anel que numa representação sobre uma esfera não contém ramos no interior.*

DEF. 27 — **Malha interior** de um grafo planar *é um anel que numa representação no plano não contém ramos no interior* (anel 1-2-3-1 no segundo grafo da fig. 2-b).

DEF. 28 — **Malha exterior** ou **cercadura** de um grafo planar *é o anel que numa representação no plano não contém ramos no exterior* (anel 1-2-4-1 no segundo grafo da fig. 2-b).

PROP. 27 — Pode definir-se malha de um grafo planar como todo o anel que, numa representação gráfica no plano do grafo, não possui ramos no interior ou no exterior.

PROP. 28 — Na representação de um grafo sobre uma esfera nenhuma malha se individualiza como malha exterior.

DEF. 29 — **Grafo não planar** *é um grafo em que existem cruzamentos autênticos quando representado sobre um plano ou uma esfera* (fig. 2-c).

PROP. 29 — Um grafo não planar contém pelo menos quatro malhas (visto que um percurso situado inteiramente fora do plano forma pelo menos uma malha com a porção do grafo situado no plano).

PROP. 30 — Existe sempre uma superfície espacial de conexidade suficiente sobre a qual um dado grafo não planar pode ser representado sem cruzamentos.

PROP. 31 — Existe uma superfície espacial de conexidade mínima sobre a qual um dado grafo pode ser representado sem cruzamentos.

DEF. 30 — **Género** *g* de um grafo *é o grau mínimo de conexidade da superfície orientável sobre a qual o grafo pode ser representado sem cruzamentos.*

PROP. 32 — Um grafo planar é de género nulo (dado que se pode representar sem cruzamentos sobre uma esfera, a qual possui género nulo).

PROP. 33 — Um grafo representável sem cruzamentos sobre uma superfície toroidal (que tem género $g = 1$) é um grafo de género unitário.

DEF. 31 — **Grafos elementares não planares** *são o pentágono completo* (definido pelos cinco lados e pelas cinco diagonais) *e o hexágono completo* (definido pelos seis lados e pelas seis diagonais).

PROP. 34 — O pentágono completo e o hexágono completo têm género unitário, pois se podem representar sem cruzamentos sobre um toro e possuem encruzilhadas quando representados num plano ou numa esfera (fig. 2-d).

PROP. 35 — **Teorema de Kuratowski**: *É condição necessária e suficiente para que um grafo seja planar que não contenha como sub-grafos nem o pentágono completo nem o hexágono completo.*

PROP. 36 — A não planaridade de um grafo revela-se quando se atinge um dos grafos elementares não planares (consequência do teorema de Kuratowski).

DEF. 34 — **Nó singular** ou **nó de separação** num grafo conexo *é um nó que constitui o único elemento a um dado sub-grafo e ao seu complemento* (fig. 3-c).

PROP. 38 — A condição necessária e suficiente para que um dado nó seja nó de separação é que existam dois outros nós do grafo tais que qualquer percurso que os una passe necessàriamente por esse nó.

PROP. 39 — Cada nó interno de uma árvore é um nó de separação.

DEF. 35 — **Desdobramento** de um nó de separação *consiste na reprodução deste nó em tantos nós quantos os sub-grafos isolados que pode provocar* (fig. 3-e.)

PROP. 40 — Os ramos inicialmente incidentes num nó de separação incidem, após o desdobramento, em dois ou mais nós (tantos quantos os sub-grafos isolados do grafo conexo inicial resultantes do desdobramento).

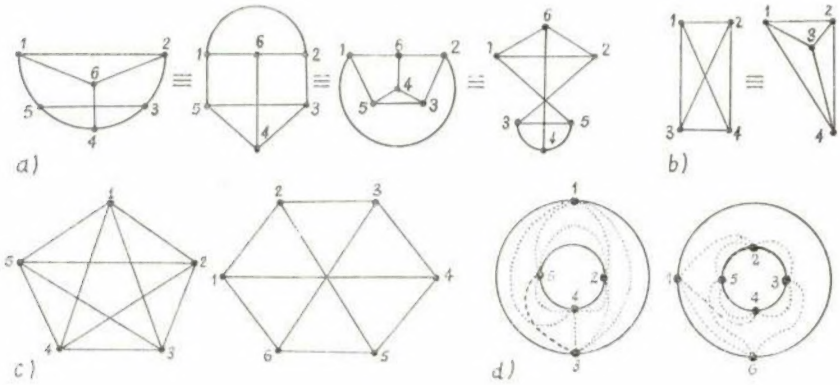


Fig. 2 — Planaridade dos grafos.

a) Transfiguração;
b) Grafo planar;
c) Grafos elementares não planares;
d) Grafos de género unitário (pentágono e hexágono completos).

2.3 — Singularidade

DEF. 32 — **Grafo conexo** *é um grafo em que se pode chegar a um nó partindo de qualquer outro nó por meio de um certo número de ramos* (fig. 3-a).

PROP. 37 — Entre cada par de nós de um grafo conexo existe pelo menos um percurso.

DEF. 33 — **Grafo não conexo** *é um grafo composto de pelo menos duas partes completas separadas* (fig. 3-b).

DEF. 36 — Haste singular ou haste de separação *é o ramo de árvore cujas extremidades são nós de separação* (fig. 3-e).

PROP. 41 — Desdobrando todos os h ramos de uma árvore esta decompõe-se em n_a-1 ramos isolados, onde n_a é o número de nós da árvore.

DEF. 37 — **Grafo separável** *é aquele que contém pelo menos um nó singular.*

2.4 — Corte

DEF. 38 — **Corte** de um grafo *consiste na extracção simultânea de um conjunto de ramos que provoque a sua cisão em dois sub-grafos isolados* (fig. 3-f).

DEF. 39 — **Feixe de corte** *é o conjunto de ramos do grafo resultantes do corte.*

PROP. 42 — O corte indica-se gràficamente por uma linha de separação fechada e os ramos por esta intersectados constituem o feixe de corte.

PROP. 43 — Um feixe de corte contém pelo menos uma haste da árvore.

DEF. 40 — **Corte-base** *é um corte em que se extrai apenas uma haste da árvore do grafo* (fig. 3-f).

e os seus ramos (unindo os nós duais das malhas contíguas do grafo dado).

PROP. 48 — O grafo dual de um grafo planar é também planar (consequência das malhas do grafo dual se poderem representar sobre um plano ou esfera).

PROP. 49 — É condição necessária e suficiente para que um grafo admita dual que seja planar (pelo que se pode definir um grafo planar como todo aquele que tem um grafo dual).

PROP. 50 — Se um grafo G′ é dual de um grafo G, então G é dual de G′.

PROP. 51 — O grafo dual de um dípolo é um dípolo (para se obter o dípolo dual pode conceber-se o dípolo fechado por uma linha; figura 4-b).

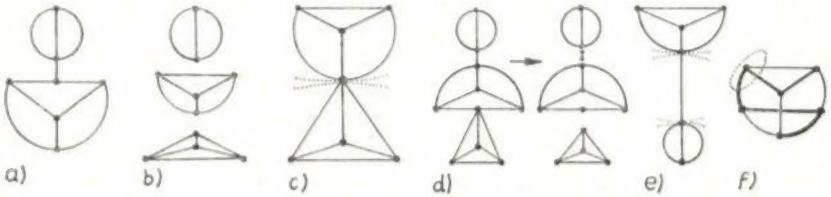


Fig. 3 — Singularidade e corte de grafos.

a) Grafo conexo;
b) Grafo não conexo;
c) Nó de separação (singular);
d) Desdobramento;
e) Haste de separação (singular).

DEF. 41 — **Feixe de corte-base** *é um feixe de corte que contém sòmente uma haste da árvore.*

PROP. 44 — Para uma dada árvore de um grafo cada haste define unìvocamente um feixe de corte-base.

PROP. 45 — Um grafo possui tantos feixes de corte-base quantas as hastes (ou seja, $h = n_a - 1$).

2.5 — Dualidade

DEF. 42 — **Dual** de um grafo *é um grafo em que cada nó corresponde a uma malha do grafo dado, cada ramo a um ramo do grafo dado e cada malha a um nó do grafo dado* (fig. 4-a).

PROP. 46 — Na malha exterior existe um nó dual (exterior ao grafo dado).

PROP. 47 — Na construção de um grafo dual marcam-se os seus nós (um em cada malha interior e na malha exterior do grafo considerado),

PROP. 52 — A *dualidade topológica* caracteriza-se pelas correspondências:

nó	⟷	malha
haste	⟷	corda
árvore	⟷	co-árvore
feixe de corte	⟷	anel
ligação em série	⟷	ligação em paralelo (fig. 4-b)
ligação em estrela	⟷	ligação em triângulo (fig. 4 a)

DEF. 43 — **Grafo planar orientado** *é um grafo em que cada ramo possui uma flecha indicadora de um sentido positivo relativo a uma determinada grandeza física* (por exemplo, tensão, corrente, energia, etc.) (fig. 4-e).

PROP. 53 — Cada ramo orientado é convergente para um seu nó extremidade e divergente do outro.

PROP. 54 — A todo o grafo planar orientado corresponde unìvocamente um grafo planar dual orientado.

PROP. 55 — Grafos duais orientados têm os ramos orientados em correspondência com duas grandezas físicas duais.

DEF. 44 — **Orientação dual** de dois grafos duais *é definida de modo a que o ângulo entre os ramos duais seja inferior* (ou superior, conforme a convenção) *a* π *radianos medindo sempre os ângulos a partir dos ramos de um dos grafos para os correspondentes do outro no mesmo sentido de rotação* (convencionalmente do ramo dual para o ramo inicial no sentido directo) (fig. 4-c, d, e).

PROP. 58 — Numa árvore o número de hastes é inferior de uma unidade ao número de nós (em virtude da definição de árvore)

$$h = n-1 \qquad (3)$$

e, inversamente, se um grafo tem n nós e $n-1$ ramos então é uma árvore (em particular, esta relação é válida para um percurso).

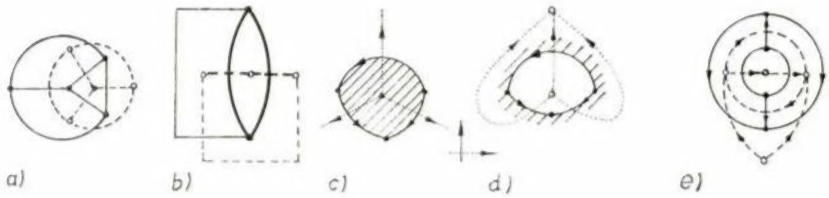


Fig. 4 — Dualidade de grafos.

a) Grafos duais;
b) Dualidade de ligação em série e em paralelo;
c) Orientação dual de malha interior;
d) Orientação dual de malha exterior;
e) Grafos duais orientados.

3. RELAÇÕES TOPOLÓGICAS FUNDAMENTAIS

DEF. 45 — **Relação topológica** *consiste numa expressão algébrica entre os elementos de um ou mais grafos.*

PROP. 56 — Para se ligarem n nós são precisos pelo menos $n-1$ ramos

$$r \geqslant n-1 \qquad (1)$$

PROP. 57 — Numa árvore de um grafo o número de nós n_a é igual ao número total de nós do grafo n (em consequência da definição de árvore)

$$n_a = n \qquad (2)$$

PROP. 59 — Numa malha e num anel o número de nós n_o é igual ao número de ramos r_o

$$n_o = r_o \qquad (4)$$

PROP. 60 — Numa árvore o número de nós extremidade n_e é superior em duas unidades ao número de ramificações R

$$n_e = R + 2 \qquad (5)$$

pois uma árvore não ramificada possui duas extremidades e cada nova ramificação faz aparecer uma nova extremidade.

PROP. 61 — Num grafo o número total de malhas m excede o número de cordas de uma unidade

$$m = c + 1 \qquad (6)$$

visto que existe uma malha exterior e tantas malhas interiores quantas as cordas.

PROP. 62 — O número total de ramos r de um grafo contém o número de hastes h e o número de cordas c (segundo as definições de haste e de cordas)

$$r = h + c \qquad (7)$$

PROP. 63 — Um grafo conexo com n nós e r ramos tem o número de cordas c tal que

$$c = r - n + 1. \tag{8}$$

dado que a escolha de uma árvore num grafo define de maneira unívoca um sistema de $c = r - h = r - (n - 1)$ anéis-base.

PROP. 64 — Entre os elementos de um grafo G e do seu dual G′ existem as seguintes relações:

$$n' = m + 1 \tag{9}$$

$$m' = n - 1 \tag{10}$$

$$r' = r \tag{11}$$

PROP. 65 — Entre os elementos de um grafo G existe a mesma relação que se verifica entre os elementos do seu dual G′ (pois também é um grafo)

$$c = r - n + 1 \tag{12}$$

$$c' = r' - n' + 1 \tag{13}$$

PROP. 66 — A soma dos nós de dois grafos duais é superior em duas unidades ao número de ramos comum aos dois grafos

$$n + n' = r + 2 = r' + 2 \tag{14}$$

4. MATRIZES DE INCIDÊNCIA

DEF. 46 — *Grafo associado* a um sistema físico linear (mecânico, eléctrico, magnético, térmico, etc.) *é o grafo relativo às ligações entre os seus elementos físicos.*

PROP. 67 — Um grafo associado a um sistema físico linear não contém informação sobre os respectivos elementos físicos (como consequência da definição de grafo).

DEF. 47 — *Matriz de incidência* de um grafo conexo sem singularidades *é uma matriz constituída apenas por elementos de valor + 1, — 1 e 0 relativos à existência e orientação de uns elementos do grafo* (por exemplo, ramos) *em relação a outros* (no exemplo, nós).

PROP. 68 — As matrizes de incidência dão esclarecimentos sobre a topologia dos sistemas respectivos mas nada dizem sobre a sua estrutura física (por exemplo, fontes, impedâncias, etc.), pois contém a mesma informação que os grafos (formam-se a partir deles).

PROP. 69 — As matrizes de incidência correspondem aos processos de cálculo dos sistemas lineares evitando a formação dos correspondentes sistemas de equações.

4.1 — Matriz de incidência dos nós

DEF. 48 — **Matriz de incidência dos nós Λ** de um grafo *consiste na matriz cujos elementos são definidos por linhas em correspondência com os nós do grafo e por colunas com os ramos.*

DEF. 49 — Formação da matriz de incidência dos nós: *ramos incidentes num nó determinam elementos de valor + 1 se convergem para o nó e — 1 se divergem do nó e ramos não incidentes determinam elementos nulos* [2].

PROP. 70 — A matriz Λ tem tantas linhas quantos os nós do grafo.

PROP. 71 — A partir da matriz Λ pode reconstruir-se o grafo respectivo.

PROP. 72 — Diferentes grafos com a mesma matriz Λ correspondem a sistemas lineares com o mesmo sistema de equações.

PROP. 73 — Numa matriz Λ aparece em cada coluna uma vez + 1 e outra vez — 1 sendo todos os outros elementos nulos, pois cada ramo (relativo a cada coluna) é convergente para um seu nó extremidade e divergente para o outro.

PROP. 74 — Cada linha da matriz Λ é igual à soma negativa das restantes (devido à propriedade anterior) e portanto as linhas não são independentes entre si, isto é, a matriz Λ é singular.

DEF. 50 — **Matriz de incidência dos nós reduzida Λ_k** *é a matriz de incidência dos nós Λ sem a linha k* (em geral a última); neste sentido diz-se que Λ é a matriz completa.

PROP. 75 — A matriz Λ_k corresponde a referenciar todos os elementos ao nó k (ou seja, equivale a tomar para as grandezas de k o valor de referência nulo).

4.2 — Matriz de incidência das malhas

DEF. 51 — **Matriz de incidências das malhas** Θ *é aquela em que as linhas correspondem a malhas e as colunas a ramos do respectivo grafo.*

DEF. 52 — Formação da matriz de incidência das malhas: *o sentido positivo das malhas é arbitrado no sentido directo* (contrário ao movimento dos ponteiros do relógio); *se o sentido do ramo corresponde ao sentido positivo de circulação da malha o elemento*